

УДК 533.951

О. К. Черемных

Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины
Проспект академика Глушкова 40, корп. 4/1, Киев 187, МСП 03680
oleg.cheremnykh@gmail.com

**К теории поперечно-мелкомасштабных мод в
цилиндрическом плазменном шнуре**

Получено уравнение малых колебаний для плазменного шнура круглого сечения с винтовым магнитным полем. Показано, что это уравнение эквивалентно уравнению Хайна — Люста, однако имеет более простой вид. Приведенное уравнение позволило получить ряд ранее известных результатов, а также проанализировать поперечно-мелкомасштабные МГД-возмущения: получен критерий устойчивости этих мод, выражение для максимального инкремента, определены области распространения как устойчивых, так и неустойчивых мод. Полученные результаты могут быть использованы для интерпретации поведения солнечных магнитных трубок.

ДО ТЕОРІЇ ПОПЕРЕЧНО-ДРІБНОМАСШТАБНИХ МОД У ЦИЛІНДРИЧНОМУ ПЛАЗМОВОМУ ШНУРІ, Черемних О. К. — Отримано рівняння малих коливань для плазмового шнура круглого перерізу з гвинтовим магнітним полем. Показано, що це рівняння еквівалентне рівнянню Гайна — Люста, проте має простіший вигляд. Приведене рівняння дозволило отримати ряд раніше відомих результатів, а також проаналізувати поперечно-дрібномасштабні МГД-збурення: отримано критерій стійкості цих мод, вираз для максимального інкремента, визначено області поширення як стійких, так і нестійких мод. Отримані результати можна використати для інтерпретації поведінки сонячних магнітних трубок.

TO THE THEORY OF TRANSVERSAL SMALL-SCALE MODES IN A CYLINDRICAL PLASMA COLUMN, by Cheremnykh O. K. — The equation of small oscillations for a circular cross-section plasma column with a helical magnetic field is received. It is shown that this equation is

equivalent to Hain — Lust equation, however has simpler appearance. The given equation allows to receive a number of earlier known results, and to analyse also transversal small-scale MHD perturbations: the criterion of stability of these modes, expression for the maximum increment are obtained, areas of propagation of both stable and unstable modes are defined. The obtained results can be used for interpretation of behavior of solar magnetic tubes.

ВВЕДЕНИЕ

Цилиндрический плазменный шнур круглого сечения с винтовым магнитным полем является удобной плазменной моделью для экспериментального и теоретического исследования различных МГД-возмущений. Такая модель в течение длительного времени служит объектом исследований в космической [10, 15, 17] и высокотемпературной [1, 6, 18] плазмах. Эта геометрия также часто используется для рассмотрения фундаментальных проблем физики плазмы [2, 7, 14, 24]. Несмотря на значительную работу по теоретическому исследованию поведения плазмы в цилиндрической геометрии, многие вопросы по-прежнему остаются неясными. Отчасти это связано с тем обстоятельством, что для изучения колебаний в указанной геометрии обычно используется уравнение Хайна — Люста [30] или его модификации (см., например, [3]), которые имеют довольно сложный вид. Решение этих уравнений связано с существенными математическими трудностями. В данной работе получено уравнение малых колебаний, которое существенно проще по сравнению со стандартным видом уравнения Хайна — Люста [3]. Показано, что это уравнение может быть получено из уравнения Хайна — Люста после некоторых существенных математических преобразований. Продемонстрировано, что полученное уравнение приводит к ряду хорошо известных результатов. Оно также позволяет исследовать поперечно-мелкомасштабные возмущения плазмы, которые в ряде случаев приводят к неустойчивостям желобковых и баллонных мод, играющих важную роль в физике плазмы [4, 5, 8, 21, 23, 25, 27]. В данной работе основное внимание будет сосредоточено на условиях распространения и устойчивости поперечно-мелкомасштабных возмущений с непрерывным спектром в неоднородном плазменном шнуре.

ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Наш анализ основывается на линеаризованных МГД-уравнениях малых колебаний для идеальной плазмы, которые мы запишем, предполагая зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$ в следующем виде

$$\rho_1 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) - \nabla \cdot \vec{\tau} = 0, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p \frac{\vec{B}}{B} \frac{\vec{B}}{B} - p \operatorname{div} \vec{\xi} - B^2 (\operatorname{div} \vec{\xi} - 2 \vec{\xi} \cdot \vec{\xi}), \\
 \operatorname{div}(\vec{\xi}), &= p \vec{\xi} - p \operatorname{div} \vec{\xi}, \\
 \vec{B} &= \operatorname{rot}[\vec{\xi} \times \vec{B}], \quad \vec{j} = \operatorname{rot} \vec{B}, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0.
 \end{aligned} \tag{2}$$

Символ $\vec{\xi}$ использован в (1), (2) для обозначения возмущенных величин. Здесь введены следующие обозначения: ρ — равновесная плотность плазмы, p — ее давление, γ — показатель адиабаты, $\vec{\xi}$ — вектор смещения элементарного объема плазмы, \vec{j} — плотность тока, \vec{B} — магнитное поле, $\vec{\xi}$ — вектор кривизны силовых линий магнитного поля. Для упрощения записи мы использовали следующее масштабирование магнитного поля \vec{B} и плотности тока \vec{j} :

$$\frac{\vec{B}}{\sqrt{4}} = \vec{B}, \quad \frac{\sqrt{4}}{c} \vec{j} = \vec{j}.$$

Далее полагаем, что равновесное состояние плазмы обладает симметрией цилиндра круглого сечения и что в цилиндрической системе координат (r, θ, z) все равновесные параметры плазмы и магнитного поля зависят только от радиальной координаты, а магнитные поверхности представляют собой вложенные цилиндры радиуса r . Равновесное магнитное поле в общем случае имеет вид

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta + B_z(r) \vec{e}_z, \tag{3}$$

и удовлетворяет уравнению магнитостатического равновесия

$$\frac{d}{dr} p + \frac{B^2}{2} - \frac{B_z^2}{r} = 0. \tag{4}$$

Если фигурирующий в (1) и (2) вектор смещения $\vec{\xi}$ записать в виде $\vec{\xi} = \xi_r \vec{e}_r + \xi_z \vec{e}_z$, то (r, θ, z) — компоненты уравнения (1) с учетом равенства

$$\frac{\vec{B}}{B} \frac{\vec{B}}{B} = \frac{\vec{e}_r}{r} \frac{B}{B}$$

и правил дифференцирования

ортов $\vec{e}_r / r = \vec{e}_r / r$, $\vec{e}_\theta / r = \vec{e}_\theta / r$ примут вид

$$\frac{d}{dr} p_1 + \frac{2B}{r} \frac{B}{r} - ik_\parallel B B_r = 0, \tag{5}$$

$$\frac{im}{r} p_1 - \frac{B_r}{r} \frac{d}{dr} (rB) - ik_\parallel B B = 0, \tag{6}$$

$$ik_z p_1 - B_r \frac{d}{dr} B_z - ik_\parallel B B_z = 0. \tag{7}$$

При получении (5) — (7) было учтено, что коэффициенты линеаризованных МГД-уравнений для круглого цилиндра не зависят от ко-

ординат r и z . Поэтому отдельные фурье-гармоники в этих координатах независимы, и следовательно, можно рассматривать лишь одну фурье-гармонику винтового возмущения вида

$$\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}(r) \exp[i(\omega t - m\phi - k_z z)],$$

где $k_z = n/R$, m и n — целые числа, расстояние R определяет длину L плазменного цилиндра, $L = 2\pi R$. Поскольку амплитуда $\vec{\xi}(r)$ является функцией только радиуса, то задача становится одномерной. Фигурирующая в (5) — (7) продольная составляющая волнового вектора k_{\parallel} имеет вид

$$k_{\parallel} = \vec{k} \cdot \vec{e}_{\parallel} = \frac{m}{r} \frac{B}{B} = k_z \frac{B_z}{B},$$

а компоненты возмущенного магнитного поля находятся из (2):

$$\begin{aligned} B_r &= ik_{\parallel} B_z, \\ B_{\phi} &= ik_z (B_z - z B_r) = -\frac{1}{r} (r B_r), \\ B_z &= \frac{im}{r} (z B_r - B_z) = \frac{1}{r} (r B_r B_z). \end{aligned} \quad (8)$$

Возмущенное полное давление p_1 имеет вид

$$p_1 = (p - B^2) \operatorname{div} \vec{\xi} = ik_{\parallel} B^2 \xi_{\parallel} = 2B^2 \frac{r}{r}, \quad (9)$$

где

$$\operatorname{div} \vec{\xi} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \xi_r) + \frac{im}{r} \xi_{\phi} + ik_z \xi_z.$$

Для анализа возмущений удобно перейти в уравнениях (5) — (7) (см. рис. 1) от r - и z -составляющих вектора смещения $\vec{\xi}$ к компонентам, направленным по бинормали (ξ_b) и вдоль силовых линий магнитного поля (ξ_{\parallel})

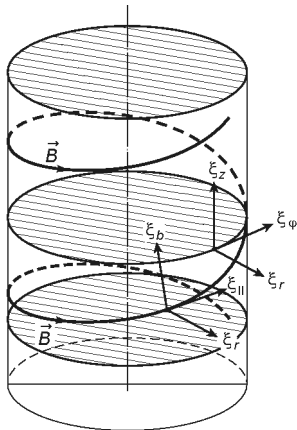


Рис. 1. Бинормальная (b) и продольная (\parallel) компоненты вектора смещения элементарного объема плазмы

$$\vec{e}_r, \vec{e}_b, \vec{e}_{\parallel},$$

$$\frac{B_z}{B} \frac{B}{z} \frac{B}{B}, \quad \vec{e}_b \vec{e} \frac{B_z}{B} \vec{e}_z \frac{B}{B}, \quad (10)$$

$$\frac{B}{B} \frac{B_z}{z} \frac{B}{B}, \quad \vec{e}_{\parallel} \vec{e} \frac{B}{B} \vec{e}_z \frac{B_z}{B}.$$

В этом случае уравнения (5) — (7) принимают вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_{\parallel}^2 B^2 \right) p_1 - \frac{2ik_{\parallel}}{r} \frac{B B_z}{r} = 0, \quad (11)$$

$$2ik_b \frac{B^2}{r} - 2 \frac{B}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B) = 0, \quad (12)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - k_{\parallel}^2 B^2 \right) k_b p_1 - 2ik_{\parallel} \frac{r}{r} B B_z = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} k_{\parallel}^2 \frac{P}{1} - ik_{\parallel} \frac{P}{1} - p_1 - 2 \frac{B^2}{r} = 0. \quad (13)$$

Фигурирующие в (11) — (13) величины p_1 , $\text{div} \vec{v}$ и k_b выражены через амплитуды r , b , \parallel :

$$p_1 = (p - B^2) \text{div} \vec{v} - iB^2 k_{\parallel} \parallel - 2B^2 \frac{r}{r},$$

$$\text{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) - ik_b b - ik_{\parallel} \parallel, \quad (14)$$

$$k_b = \frac{m B_z}{r B} - k_z \frac{B}{B}.$$

Уравнения (11) — (14) являются исходными для дальнейшего анализа.

УРАВНЕНИЕ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

Сведем уравнения (11) — (13) к одному уравнению малых колебаний для радиальной компоненты вектора смещения r . Из (12) — (13) следует

$$k_b b = \frac{i}{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial A^2} \right)} k_b^2 p_1 - 2k_{\parallel} k_b \frac{r}{r} B B_z, \quad (15)$$

$$k_{\parallel} \parallel = \frac{ik_{\parallel}^2}{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial T^2} \right)} \frac{c_T^2}{c_A^2} p_1 - \frac{2B^2}{r} r. \quad (16)$$

Здесь использованы следующие обозначения

$$\frac{\partial^2}{\partial A^2} = k_{\parallel}^2 c_A^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial s^2} = k_{\parallel}^2 c_s^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial T^2} = k_{\parallel}^2 c_T^2,$$

$$c_A^2 = \frac{B^2}{r^2}, \quad c_s^2 = \frac{p}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{c_s^2}{1 - \frac{c_s^2}{c_A^2}}.$$

Подставляя (15) и (16) в (14), получаем

$$p_1 = \frac{1}{k_b^2} \left(\frac{c_A^2}{r^2} - \frac{c_s^2}{r^2} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \rho) - 2k_{\parallel} k_b \frac{r}{r} B_z \frac{2B^2}{r^2}, \quad (17)$$

где

$$\frac{c_A^2}{r^2} = \frac{\left(\frac{c_A^2}{r^2} \right) \left(\frac{c_s^2}{r^2} \right)}{\left(c_s^2 - c_A^2 \right) \left(\frac{c_s^2}{r^2} - \frac{c_A^2}{r^2} \right)}.$$

Из (4), (11), (15) и (17) следует искомое уравнение малых колебаний:

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{c_A^2}{k_b^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \rho) \right) - 2r \frac{d}{dr} \frac{B^2}{r^2} \frac{c_A^2}{k_b^2} - \frac{B_z}{r^2} \frac{k_{\parallel} k_b}{k_b^2} \left(\frac{c_A^2}{r^2} - \frac{c_s^2}{r^2} \right) - 2r B \frac{d}{dr} \frac{B}{r} - 4 \frac{B^2}{r^2} \frac{c_A^2}{k_b^2} \frac{(k_{\parallel} B_z - k_b B)^2}{\left(\frac{c_A^2}{r^2} - \frac{c_s^2}{r^2} \right)}. \quad (18)$$

Легко убедиться, что уравнение (18) полностью эквивалентно хорошо известному уравнению Хайна — Люста [3, 30]. В случае $B_z = 0$, $B_z = 0$ уравнение (18) совпадает с уравнением малых колебаний, приведенным в [11, 12]. Если же $B = 0$, $B_z = 0$, то (18) переходит в уравнение (19) работы [17].

В случае несжимаемых возмущений $(c_s^2, \frac{c_A^2}{r^2})$ из второго уравнения (14) и уравнений (15), (16) и (17) получаем условие $\text{div} = 0$, которое должно выполняться для таких возмущений. Уравнение (18) для несжимаемых возмущений сводится к уравнению

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{c_A^2}{k_z^2} \frac{1}{m^2 / r^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \rho) \right) - 2r \frac{d}{dr} \frac{BB}{r^2} \frac{k_{\parallel} (m / r)}{k_z^2 m^2 / r^2} - \left(\frac{c_A^2}{r^2} - \frac{c_s^2}{r^2} \right) 2B \frac{d}{dr} \frac{B}{r} - \frac{4(B^2 / r^2)}{k_z^2 m^2 / r^2} \frac{k_z^2}{2} \frac{c_A^2}{r^2} = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) совпадает с уравнением малых колебаний (17.36) книги [6]. В этом уравнении продольная компонента волнового вектора k_{\parallel} не может обращаться в нуль, поскольку при его получении полагалось $k_{\parallel} c_s$.

Из структуры уравнения (18) следует, что при конечных k_b и k_{\parallel} оно имеет сингулярность в точках, где выполняется равенства

$$c_A^2(r) = c_s^2(r) \quad (20)$$

и

$$c_T^2(r) = c_s^2(r). \quad (21)$$

Условие (19) определяет альвеновский континуум, а (20) — касповый, или ММЗ-континуум. Сингулярные магнитные поверхности имеют радиальные координаты r_A и r_T , являющиеся решениями уравнений (19) и (20), соответственно. Далее точки r_A и r_T мы будем называть точками альвеновского и каспового (или ММЗ) резонанса соответственно. Отметим, что уравнение (19) имеет резонансы только в точках r_A , удовлетворяющих уравнению (20).

МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЯ ХАЙНА — ЛЮСТА

Ввиду важности уравнения (18) для рассматриваемой задачи, получим его из хорошо известного уравнения Хайна — Люста, записав последнее в виде, предложенном в [3]:

$$\frac{d}{dr} \frac{D}{C_2 r} \frac{d}{dr} (r r) - r r \frac{d}{dr} \frac{C_1}{r C_2} - \frac{C_3}{r D} - \frac{C_1^2}{C_2} \frac{1}{r D} = 0. \quad (22)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} D &= (c_s^2 - c_A^2)(k_{\perp}^2 - k_A^2)(k_{\perp}^2 - k_T^2), \\ C_1 &= 2 \frac{B^2}{r} - \frac{2B}{r} k_{\parallel} B \frac{m}{r} (c_s^2 - c_A^2)(k_{\perp}^2 - k_T^2), \\ C_2 &= 4 \frac{m^2}{r^2} - k_z^2 (c_s^2 - c_A^2)(k_{\perp}^2 - k_T^2), \\ C_3 &= D (k_{\perp}^2 - k_A^2) - 2B \frac{d}{dr} \frac{B}{r} - \frac{B^2}{r} - \\ & 4 (c_s^2 - c_A^2)(k_{\perp}^2 - k_T^2) \frac{B^2}{r}. \end{aligned} \quad (23)$$

Из (2) и (23) получаем

$$\begin{aligned} \frac{D}{C_2} &= \frac{(k_{\perp}^2 - k_A^2)}{k_b^2 - k_{\perp}^2}, \\ \frac{C_1}{C_2} &= \frac{2}{k_b^2 - k_{\perp}^2} - \frac{B^2}{r} - \frac{B B_z k_{\parallel} k_b [k_s^2 c_A^2 - k_{\perp}^2 (c_s^2 - c_A^2)]}{(c_s^2 - c_A^2)(k_{\perp}^2 - k_T^2)}, \quad (24) \\ \frac{C_1}{D} &= \frac{2 \frac{B^2}{r}}{(c_s^2 - c_A^2)(k_{\perp}^2 - k_A^2)(k_{\perp}^2 - k_T^2)} - \frac{2B^2 \frac{k_{\parallel}^2}{r}}{(k_{\perp}^2 - k_A^2)} - \frac{2 \frac{B}{r} k_{\parallel} k_b B_z}{(k_{\perp}^2 - k_A^2)}, \end{aligned}$$

$$\frac{C_3}{D} (c_s^2 - c_A^2) 2B \frac{d}{dr} \frac{B}{r} - \frac{4}{r^2} \frac{B^2}{c_A^2} - 4 \frac{B^2}{r^2} \frac{1}{c_s^2} \frac{1}{c_A^2} \frac{1}{c_T^2}$$

Величина $\frac{B^2}{r^2}$ в (24) и далее совпадает с соответствующей величиной в (18). Из (24) следует

$$\frac{C_1^2}{C_2 D} \frac{C_3}{D} \frac{C_1}{C_2} \frac{C_1}{D} \frac{C_3}{D} - \frac{4}{k_b^2} \frac{B^2}{r^2} \frac{k_b^2}{c_s^2} \frac{1}{c_A^2} \frac{1}{c_T^2} (c_s^2 - c_A^2) - 4 \frac{B^2 B_z^2}{r^2} \frac{k_{||}^2}{(c_A^2) k_b^2} - 8 \frac{B^3 B_z}{r^2} \frac{k_{||} k_b}{(c_A^2) k_b^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} p \frac{B_z^2}{2} (c_s^2 - c_A^2). \quad (25)$$

Подставляя (24), (25) в (23), после некоторых громоздких преобразований находим

$$(c_s^2 - c_A^2) r \frac{2}{r} \frac{d}{dr} p \frac{B_z^2}{2} - \frac{4B^2 B_z^2}{k_b^2} \frac{k_{||}^2}{(c_A^2) k_b^2} - 8 \frac{B^3 B_z}{r^2} \frac{k_{||} k_b}{(c_A^2) k_b^2} - \frac{d}{dr} \left(\frac{c_s^2 - c_A^2}{k_b^2} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r v_r) - 2r \frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{r^2} \frac{B_z k_{||} k_b}{r^2} \right). \quad (26)$$

Прямыми расчетами можно показать, что в (26) выражение в фигурных скобках равно

$$\frac{4B^2}{r^2} \frac{k_z^2 B^2}{k_b^2} - \frac{k_z^2 B^2}{(k_z^2 B^2)} = 4 \frac{B^2}{r^2}. \quad (27)$$

Учитывая, что

$$k_z^2 = \frac{1}{B^2} (k_{\parallel} B_z - k_b B)^2,$$

из (26) и (27) получаем уравнение (18).

КРИТЕРИЙ САЙДЕМА

Используя (18), получим хорошо известный результат из теории устойчивости цилиндрического плазменного шнура — критерий Сайдема, который определяет границу устойчивости желобковых возмущений. На границе устойчивости ($g = 0$), уравнение (18) совпадает с уравнением Эйлера для r , минимизирующим функционал потенциальной энергии для цилиндрического плазменного шнура [2, 5, 7, 14, 16, 25]:

$$\frac{d}{dr} \left(f \frac{d}{dr} \right) = g, \quad (28)$$

где

$$f = \frac{r \frac{m}{r} B - k_z B_z}{\frac{m^2}{r^2} - k_z^2},$$

$$g = 2 \frac{k_z^2}{\frac{m^2}{r^2} - k_z^2} \frac{dp}{dr} - r \frac{m}{r} B - k_z B_z - \frac{2 k_z^2 \frac{m^2}{r^2}}{k_z^2 \frac{m^2}{r^2}} + \frac{2}{r} \frac{k_z^2}{\frac{m^2}{r^2} - k_z^2} k_z^2 B_z^2 - \frac{m^2}{r^2} B^2.$$

Для мелкомасштабных возмущений с $(m/r, k_z)$ второе положительное слагаемое в выражении для g стремится к бесконечности. Неустойчивость может возникнуть только в случае, если указанное слагаемое будет очень маленьким. Это реализуется, если на некотором радиусе r_0 выполняется равенство $k_{\parallel}^2 B^2 = \frac{m}{r} B - k_z B_z = 0$, т. е. возмущения имеют вид «желобков» [4, 5, 15]. Вблизи радиуса локализации $r = r_0$ уравнение (28) переходит в уравнение, приведенное в [2,

5],

$$\frac{d^2 r}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dr}{dx} - \frac{q}{x^2} r = 0, \quad (29)$$

где

$$x = r - r_0, \quad p = \frac{dp}{dr}, \quad \frac{d}{dr}, \quad \frac{B}{rB_z}, \quad q = \frac{2}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{2}{r} \frac{d}{dr} \right) P, \quad \frac{m^2 B^2}{r^2 B_z^2}.$$

При $x \rightarrow 0$ правую часть в уравнении (29) можно пренебречь, и решение имеет вид степенной функции $r \sim x^\alpha$, где

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{4} - q}. \quad \text{Если } 1/4 - q > 0, \text{ то при } x > 0 \text{ решение для } r(x)$$

расходится при $x \rightarrow 0$, так что его невозможно сплести с решением при $x < 0$. Следовательно, при $1/4 - q > 0$ непрерывное решение для r отсутствует, что говорит об устойчивости плазменной системы. Если же $1/4 - q < 0$, то решение для r можно записать в виде

$$r(x) = \frac{\sin(\sqrt{|1/4 - q|} \ln x)}{x^{1/2}}.$$

Это решение сильно осциллирует при $x \rightarrow 0$, так что построение непрерывного решения оказывается возможным.

Таким образом, цилиндрический плазменный шнур будет локально устойчив при $1/4 - q > 0$ или в физических переменных

$$\frac{r}{4} - \frac{2}{B_z^2} \frac{dp}{dr} > 0. \quad (30)$$

Из (30) следует, что при $p < 0$, стабилизирующим фактором является перекрещенность силовых линий магнитного поля, $\neq 0$. Это условие устойчивости цилиндрического плазменного шнура с винтовым магнитным полем относительно желобковых возмущений было получено Сайдемом [13]. Для возникновения неустойчивости достаточно наличия радиуса локализации внутри шнура r_0 и выполнения условия (30).

ПОПЕРЕЧНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Критерий Сайдема (30) определяет границу устойчивости цилиндрической плазмы относительно желобковых возмущений, вытянутых вдоль силовых линий, и мелкомасштабных поперек магнитного поля. В отличие от желобковых мод баллонные моды [24, 25, 29, 30] не являются почти постоянными вдоль силовых линий магнитного поля ($k_{\parallel} \neq 0$).

Часто желобковые и баллонные моды называются поперечно-мелкомасштабными модами. Эти моды определяют устойчивость магнитосферной плазмы [18, 22, 25, 27] и высокотемпературной плазмы [4, 6, 35]. Они также в ряде случаев определяют устойчивость

плазменных структур на Солнце [16, 36]. Поперечно-мелкомасштабные стоячие МГД-волны в магнитосфере Земли [19, 20, 26, 28, 32, 34, 35] являются основными волнами, определяющими волновую энергетику магнитосферной плазмы. Ниже мы, используя полученные результаты, остановимся на условии распространения и устойчивости таких возмущений в неоднородном плазменном цилиндре.

В приближении поперечной мелкомасштабности возмущений

$$k_b \ll k_{\parallel}, \quad k_b L \ll 1, \quad (31)$$

где L — характерный масштаб поперечной неоднородности плазмы, уравнение (18) допускает упрощение

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{2}{k_b^2} \frac{d}{dr} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r k_r) - \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{A} \right) k_r - \frac{2}{r} \frac{dB}{dr} \frac{d}{dr} \frac{B}{r} - \frac{4B^4}{r^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{T} \right) (c_s^2 - c_A^2)} = 0. \quad (32)$$

Наличие в уравнении (32) большого параметра, пропорционального k_b^2 , указывает на возможность использовать ВКБ-приближение по радиальной координате. Представим k_r в виде

$$k_r = e^{is(r)}. \quad (33)$$

Фигурирующую в (33) фазу s можно разложить в асимптотический ряд по параметру k_b

$$s = s_0 + s_1 + s_2,$$

где $s_0 \sim O(k_b^1)$, $s_1 \sim O(k_b^0)$, $s_2 \sim O(k_b^{-1})$ и т. д. Ниже мы ограничимся главным порядком ВКБ-приближения, т. е. учтем только первый член разложения. Введем в рассмотрение величину k_r

$$k_r = \frac{ds_0}{dr}, \quad (34)$$

которую условно можно назвать радиальной компонентой волнового вектора. В отличие от бинормальной компоненты k_b волнового вектора, величина k_r не является независимым параметром, и находится из решения уравнения (32).

Подставляя (33) в (32) и учитывая (34), получаем зависимость k_r^2 от радиальной координаты и частоты

$$\frac{k_r^2}{k_b^2} = 1 - \frac{2B}{\left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{A} \right)} \frac{d}{dr} \frac{B}{r} - \frac{4B^4}{r^2} \frac{1}{\left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{T} \right) \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2}{A} \right) (c_s^2 - c_A^2)}. \quad (35)$$

Уравнение (35) можно переписать в виде

$$k_r^2(r, \omega) = k_b^2 - \frac{\omega^2(r)}{c_A^2(r)} - \frac{\omega^2(r)}{c_T^2(r)}, \quad (36)$$

где частоты ω^2 определяются уравнениями

$$\omega^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2}{4}\right)^2 + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \omega_3^2}{4}},$$

$$\omega_1^2 = \frac{2B}{r} \frac{d}{dr} \frac{B}{r}, \quad \omega_2^2 = \frac{\omega^2}{T},$$

$$\omega_3^2 = \frac{4B^4}{r^2} \frac{1}{c_s^2} \frac{1}{c_A^2}, \quad \omega_4^2 = 4 \frac{B^4}{r^2} \frac{1}{c_s^2} \frac{1}{c_A^2}. \quad (37)$$

Частоты $\omega_2^2, \omega_3^2, \omega_4^2$ всегда положительны. Частота ω_1^2 является величиной знакопеременной. Из (37) следуют неравенства

$$\omega_2^2 > \frac{\omega^2}{T}, \quad \omega_3^2 > \frac{\omega^2}{A}. \quad (38)$$

Частота ω_1^2 может быть как больше, так и меньше альвеновской частоты ω_A .

Из неравенств (38) следует, что устойчивые моды генерируются при условии $\omega^2 > 0$. Из (37) находим, что это условие реализуется в случае

$$\frac{\omega_1^2}{2} > \frac{\omega_2^2}{4} + \frac{\omega_3^2}{4} + \frac{\omega_4^2}{4} = 0. \quad (39)$$

В противоположном случае могут реализоваться неустойчивые поперечно-мелкомасштабные моды.

ПОПЕРЕЧНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ВОЛНЫ

В физических переменных неравенство (39) имеет вид

$$k_{\parallel}^2 = \frac{2B}{B^2} \frac{d}{dr} \frac{B}{r} - \frac{4B^4}{r^2 B^4}. \quad (40)$$

В этом случае, как видно из уравнения (36) имеются области локализации («прозрачности») поперечно-мелкомасштабных волн, в которых выполняется условие их распространения, $k_r^2 > 0$.

На рис. 2 приведена зависимость k_r^2 от ω^2 для рассматриваемого случая. Видно, что в зависимости от соотношения между ω^2 и ω_A^2 реализуются две области распространения волн.

Если в (40) положить $k_{\parallel} = 0$, то получаем критерий устойчивости для желобковых возмущений

$$\frac{B}{r} \frac{d}{dr} \frac{B}{r} - \frac{2B^4}{r^3 c_A^2} > 0. \quad (41)$$

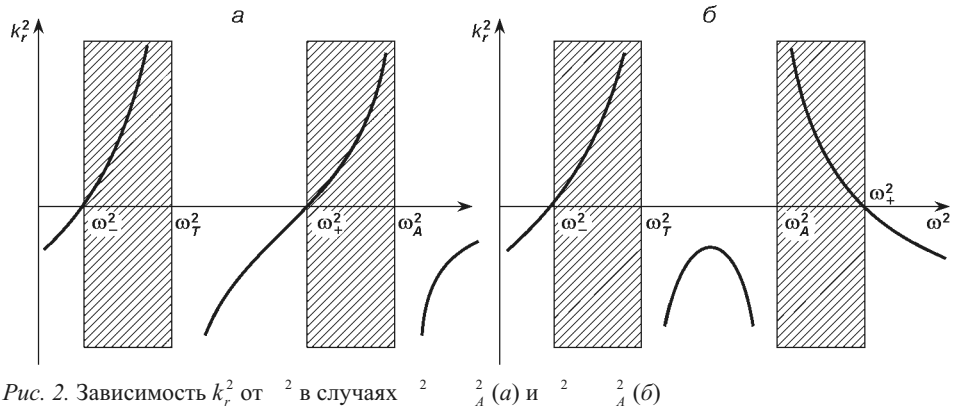


Рис. 2. Зависимость k_r^2 от ω^2 в случаях $\omega_-^2 < \omega_7^2 < \omega_1^2 < \omega_A^2$ (а) и $\omega_-^2 < \omega_7^2 < \omega_A^2 < \omega_+^2$ (б)

Неравенство (41) можно использовать, если $k_{\parallel} = 0$ в некотором конечном интервале r , т. е. в случаях, когда существует интервал r , в котором отсутствует шир магнитного поля $\omega = (B / rB_z) = 0$. С учетом условия равновесия (4) и равенства

$$\frac{B}{B} - \frac{B_z}{B_z} - \frac{1}{r} = 0,$$

вытекающего из условия $\omega = 0$, неравенство (41) можно переписать в виде

$$\frac{dp}{dr} > 0. \tag{42}$$

Неравенство (42) также следует из критерия Сайдема (30), если в последнем положить шир равным нулю, т. е. $\omega = 0$. Следовательно, в приближении бесконечно малого шира критерий Сайдема и критерий (40) дают один и тот же результат.

Таким образом, критерий (40) обобщает критерии (30) на случай поперечно-мелкомасштабных возмущений с $k_{\parallel} = 0$ в цилиндрическом плазменном шнуре с малым давлением. С учетом уравнения магнито-статического равновесия (4) критерий (40) с $k_{\parallel} = 0$ можно переписать в виде

$$k_{\parallel}^2 > \frac{4}{r^2} \frac{B^2 B_z^2}{B^4} - \frac{2}{rB^2} \frac{d}{dr} p > \frac{B_z^2}{2}. \tag{43}$$

Если в неравенстве (43) положить $B_z = 0$, то оно принимает вид

$$k_{\parallel}^2 > p / r, \tag{44}$$

где p / r — характерный масштаб изменения давления,

$1/r$ — радиальная кривизна силовых линий магнитного поля, $2p / B^2$. Неравенство (44) совпадает с хорошо известным условием устойчивости плазмы относительно баллонных мод [4, 9, 25]. При

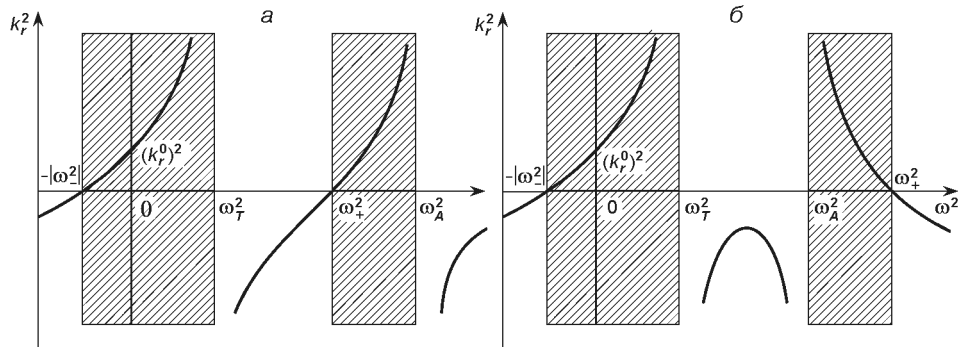


Рис. 3. Зависимость k_r^2 от ω^2 для баллонной неустойчивости в случаях $\omega^2 < \omega_A^2$ (а) и $\omega^2 > \omega_A^2$ (б)

$B = 0$ из (4) и (43) получаем условие $k_{||}^2 > 0$, которое заведомо реализуется, и поэтому устойчивые поперечно-мелкомасштабные моды в этом случае реализуются всегда.

БАЛЛОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Положим, что неравенства (40) и (43) изменены на противоположные, так что $\omega^2 < 0$. Введем в рассмотрение инкремент неустойчивости ($\omega^2 - \omega_r^2$) и перепишем (36) в виде

$$k_r^2 = k_b^2 \frac{(\omega^2 - \omega_r^2)(|\omega^2| - \omega_r^2)}{(\omega^2 - \omega_A^2)(\omega^2 - \omega_T^2)}. \quad (45)$$

Видно, что условие существования неустойчивых мод $k_r^2 > 0$ реализуется при условии $|\omega^2| > \omega_r^2$. Поэтому максимальный инкремент баллонной неустойчивости равен

$$\omega_{\max}^2 = |\omega_r^2|. \quad (46)$$

При $\omega^2 = 0$ реализуются долгоживущие баллонные и касповые моды с k_r^2 , равным $(k_r^0)^2$:

$$\frac{(k_r^0)^2}{k_b^2} = \frac{|\omega_r^2|}{\omega_A^2 \omega_T^2}. \quad (47)$$

Зависимость (45) качественно представлена на рис. 3. Видно, что область прозрачности неустойчивых баллонных мод примыкает к области распространения касповых волн.

В случае $k_r = 0$ и $\omega = 0$ из (45) следует $|\omega^2| = 0$ или, что то же самое, (см. (37))

$$\frac{\omega^4}{4} - \frac{\omega^2}{1} + \frac{\omega_r^2}{2} = 0,$$

т. е. получаем уравнение, определяющее границу баллонной неустойчивости.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные результаты работы сводятся к следующим.

— Получено уравнение малых колебаний (18) в цилиндрической неоднородной по радиусу плазме, удерживаемой винтовым магнитным полем с компонентами B и B_z .

— Установлено, что уравнение (18) полностью эквивалентно хорошо известному уравнению Хайна — Люста (22). В то же время уравнение (18) имеет более простой вид.

— Показано, что в случае $B = 0$ или $B_z = 0$ уравнение (18) переходит в ранее полученные уравнения. В случае несжимаемых возмущений оно также сводится к известному уравнению (19). Разъяснено, почему в этом уравнении нельзя продольную составляющую волнового вектора k_{\parallel} обращать в ноль.

— Из уравнения (18) следует критерий устойчивости Сайдема (30) относительно желобковых возмущений.

— Из (18) получено уравнение (32) для поперечно-мелкомасштабных мод, которое решено в ВКБ-приближении. В результате получено выражение (36) для эйконала.

— С помощью (36) получен критерий устойчивости (40) для баллонных мод, а также выражение (46) для максимального инкремента этих мод. Показано, что в пределе малого шира критерии (30) и (40) дают один и тот же результат. Установлено, что при определенном выражении для эйконала (см. (45)) реализуются долгоживущие баллонные и касповые моды.

— С помощью (36) определены области распространения в неоднородной цилиндрической плазме устойчивых альвеновских и касповых мод и неустойчивых баллонных мод.

Полученные результаты качественно описывают поведение УНЧ-мод с непрерывным спектром в неоднородных плазменных цилиндрах и могут быть использованы для интерпретации поведения солнечных магнитных трубок.

Работа выполнена в рамках Комплексной научной программы НАН Украины по космическим исследованиям и Программы НАН Украины по физике плазмы.

Работа была частично поддержана Украинским научно-техническим центром по проекту № 6060.

Автор выражает благодарность Д. Ю. Климушкину и А. С. Парновскому за обсуждение результатов.

1. Бейтман Г. МГД-неустойчивости. — М.: Энергоиздат, 1982.—200 с.
2. Бернштейн А. Неустойчивости плазмы // Основы физики плазмы / Под ред. А. А. Галеева, Р. Судана. — Т. 1. —С. 365—392.
3. Гуссенс М. Магнитогидродинамические волны и волновой нагрев неоднородной плазмы // Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худа. — М.: Мир, 1995.—С. 144—178.

4. *Загородний А. Г., Черемных О. К.* Введение в физику плазмы. — Киев: Наук. думка, 2014.—696 с.
5. *Кадомцев Б. Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / Под. ред. М. А. Леонтовича. — М.: Госатомиздат, 1963.—Вып. 2.—С. 132—176.
6. *Кенро Миямото.* Основы физики плазмы и управляемого синтеза. — М.: Физматлит, 2007.—424 с.
7. *Ладиков-Роев Ю. П., Черемных О. К.* Математические модели сплошных сред. — Киев: Наук. думка, 2010.—552 с.
8. *Мазур Н. Г., Федоров Е. Н., Пилипенко В. А.* Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме // Геомагнетизм и аэронавигация.—2012.—**52**, № 5.—С. 639—648.
9. *Михайловский А. Б.* Теория плазменных неустойчивостей. — М.: Атомиздат, 1977.—Т. 2.—306 с.
10. *Паркер Е.* Космические магнитные поля. Их образование и проявления. Часть 1. — М.: Мир, 1982.—608 с.
11. *Прист Э. Р.* Солнечная магнитогидродинамика. — М.: Мир, 1985.—590 с.
12. *Робертс Б.* Магнитогидродинамические волны на Солнце // Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худа. — М.: Мир, 1995.—С. 112—143.
13. *Сайдем Б.* Устойчивость самосжатого линейного разряда // Тр. второй междунар. конф. по мирному использованию атомной энергии. — М.: Атомиздат, 1959.—С. 89—93.
14. *Трубников Б. А.* Теория плазмы. — М.: Энергоатомиздат, 1996.—464 с.
15. *Филиппов Б. П.* Эруптивные процессы на Солнце. — М.: Физматлит, 2007.—216 с.
16. *Цап Ю. Т., Копылова Ю. Г., Степанов А. В.* Баллонная неустойчивость и колебания корональных петель // Астрон. журн.—2006.—№ 12.—С. 1142—1152.
17. *Черемных О. К., Климушкин Д. Ю., Косторев Д. В.* О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с непрерывным спектром // Кинематика и физика небес. тел.—2014.—**30**, № 5.—С. 3—21.
18. *Шафранов В. Д.* К вопросу о гидромагнитной устойчивости плазменного шнура с током в сильном магнитном поле // Журн. эксперим. и теорет. физики.—1970.—**40**.—С. 241—253.
19. *Agapitov A. V., Cheremnykh O. K.* Natural oscillations of the Earth magnetosphere associated with solar wind sudden impulses // Ukr. J. Phys.—2008.—**53**, N 5.—P. 508—512.
20. *Agapitov A. V., Cheremnykh O. K.* Polarization of ULF waves in the Earth's magnetosphere // Kinematics and Physics of Celestial Bodies.—2011.—**27**, N 3.—P. 117—123.
21. *Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Revenchuk S. M., Pustovitov V. D.* General geometric dispersion relations for toroidal plasma configuration // Plasma Phys. and Controlled Fusion.—1994.—**36**, N 4.—P. 641—656.
22. *Burdo O. S., Cheremnykh O. K., Verkhoglyadova O. P.* Study of ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // Izv. Akad. Nauk. Fiz.—2000.—**69**, N 9.—P. 51896—1900.
23. *Cheremnykh O. K.* Transversally small-scale perturbation in arbitrary plasma configurations with magnetic surfaces // Plasma Phys. and Controlled Fusion.—2010.—**52**, N 9.—095006.

24. *Cheremnykh O. K., Andrushchenko Z. M., Edenstrasser J. W., Taranov V. B.* Relaxation of non-ideal magnetohydrodynamic plasma in cylindrical column // *Phys. Plasmas.*—1994.—**1** (8).—P. 2525—2530.
25. *Cheremnykh O. K., Danilova V. V.* Transverse small-scale MHD-perturbations in space plasma with magnetic surfaces // *Kinematics and Physics of Celestial Bodies.*—2011.—**27**, N 2.—P. 98—108.
26. *Cheremnykh O. K., Parnovski A. S.* The theory of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // *Adv. Space Res.*—2004.—**33**, N 5.—P. 769—773.—DOI:10.1016/S0273-1177(03)00642-2.
27. *Cheremnykh O. K., Parnovski A. S.* Flute and ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth: Stability and influence of the ionospheric conductivity // *Space Science: New research* / Ed. by N. S. Maravell. — New York: Nova Science Publishers, 2006.— P. 71—108.
28. *Cheremnykh O. K., Parnovski A. S.* Influence of ionospheric conductivity of the ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // *Adv. Space Res.*—2006.—**37**, N 3.—P. 599—603.—DOI:10.1016/j.asr.2005.01.073.
29. *Dewar R. L., Glasser A. H.* Balloning mode spectrum in general toroidal systems // *Phys. Fluids.*—1983.—**26**.—P. 3038—3052.
30. *Hain K., Lust R. Z.* Zur Stabilität Zylinder symmetrischer Plasma Konfigurationen mit Volumenströmen // *Naturforsch.*—1958.—**13a**.—S. 936—940.
31. *Klimushkin D. Yu.* Spatial structure of transversally small-scale hydromagnetic waves in plane finite-beta model magnetosphere // *Planet. Space Sci.*—1997.—**45**.—P. 269—279.—DOI:10.1016/S0032-0633(96)00078-5.
32. *Klimushkin D. Yu., Leonovich A. S., Mazur V. A.* On the propagation of transversally small-scale standing Alfvén waves in a three-dimensionally inhomogeneous magnetosphere // *J. Geophys. Res.*—1995.—100A, N 6.—P. 9527—9534.—DOI: 10.1029/94JA03233.
33. *Kruskal M. D., Johnson J. L., Gottlieb M. B., Goldman L. M.* Hydromagnetic instability in stellarator // *Phys. Fluids.*—1958.—**1**.—P. 217—224.
34. *Leonovich A. S., Mazur V. A.* A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere // *Planet. Space Sci.*—1993.—**41**.—P. 697—717.—DOI: 10.1016/0032-0633(93)90055-7.
35. *Mercier C.* Critere de stabilite d'un system toroidal hydromagnetique en pressure scalaire // *Nucl. Fus. Suppl.*—1962.—**2**.—P. 801—808.
36. *Stepanov A. V., Shibasaki K., Kopylova Yu. G., Tsap Yu. T.* MHD-oscillations of coronal loops and diagnostics of flare plasma // *Solar Physics with Nobeyama Radioheliograph: Proc. Nobeyama Symposium.*—NSRO.—2004.—Report N 1.—P. 23—31.

Статья поступила в редакцию 13.04.15