

УДК 533.951

О. К. Черемных¹, Д. Ю. Климушкин², Д. В. Костарев²

¹Институт космических исследований Национальной академии наук Украины
и Государственного космического агентства Украины
Проспект академика Глушкова, 40, корп. 4/1, Киев 187, МСП 03680
oleg.cheremnykh@gmail.com

²Институт солнечно-земной физики
а/я 291, ул. Лермонтова, 126-а, Иркутск, Россия, 664033
klimush@iszf.irk.ru

О структуре азимутально-мелкомасштабных УНЧ-колебаний горячей космической плазмы в кривом магнитном поле. Моды с непрерывным спектром

Рассмотрена задача о распространении азимутально-мелкомасштабных мод с ультранизкими частотами в одномерно-неоднородной плазме с переменной кривизной силовых линий магнитного поля. Определены области распространения и поперечная структура устойчивых альвеновских и касповых мод и неустойчивых баллонных мод. Показана возможность долгоживущих баллонных и касповых мод. Полученные результаты качественно описывают поведение УНЧ-мод с непрерывным спектром в магнитосфере Земли и могут быть использованы для интерпретации данных измерений с космических аппаратов и радаров SuperDARN.

ПРО СТРУКТУРУ АЗИМУТАЛЬНО-ДРІБНОМАСШТАБНИХ УНЧ-КОЛИВАНЬ ГАРЯЧОЇ КОСМІЧНОЇ ПЛАЗМИ У КРИВОМУ МАГНІТНОМУ ПОЛІ. МОДИ З НЕПЕРЕРВНИМ СПЕКТРОМ, Черемних О. К., Клімушкін Д. Ю., Костарев Д. В. — Розглянуто задачу про поширення азимутально-дрібномасштабних мод з ультранизкими частотами в одновимірній-неоднорідній плазмі зі змінною кривиною силових ліній магнітного поля. Визначено області поширення та поперечна структура стійких альвенівських і каспових мод та нестійких балонних мод. Показано можливість довгоживучих балонних і каспових мод. Отримані результати якісно описують поведінку УНЧ-мод з неперервним спектром у магнітосфері Землі і можуть використовувати-

ся для інтерпретації даних вимірювань з космічних апаратів і радарів SuperDARN.

ON THE STRUCTURE OF AZIMUTHALLY SMALL-SCALE ULF OSCILLATIONS OF HOT SPACE PLASMA IN CURVED MAGNETIC FIELD. MODES WITH CONTINUOUS SPECTRUM, by Cheremnykh O. K., Klimushkin D. Yu., Kostarev D. V. — *The problem of azimuthally small-scale ULF modes' propagation in plasma with 1D inhomogeneity and variable magnetic field lines' curvature is analyzed. The propagation areas and the transverse structure of stable Alfvén and cusp modes, as well as unstable ballooning modes, are determined. It is shown that long-living ballooning and cusp modes can exist. Our results qualitatively describe the behaviour of ULF modes with continuous spectrum in the terrestrial magnetosphere and can be used to interpret the data of spacecraft and SuperDARN radar measurements.*

ВВЕДЕНИЕ

Наблюдаемые в магнитосфере Земли ультранизкочастотные (УНЧ) волны обычно делятся на два типа: волны с большими и малыми азимутальными волновыми числами m . В настоящее время предполагается, что волны с $m \sim 1$ возбуждаются процессами на границе магнитосферы или приходят из межпланетной среды [2, 4, 6, 10, 25, 26]. Волны с $m \gg 1$ могут генерироваться за счет инжекции в плазму энергичных частиц во время суббурь [42, 46, 51] и различных плазменных неустойчивостей [31, 33, 43]. Возможны также комбинированные механизмы: внешнее воздействие на магнитосферу сопровождается перестройкой ее внутренней структуры, что приводит к генерации УНЧ-волн с большими азимутальными волновыми числами [50].

Ультранизкочастотные волны с $m \gg 1$ часто наблюдаются в приэкваториальных областях магнитосферы [3], характеризующихся высоким плазменным давлением (отношение плазменного давления к магнитному ~ 1) и значительной кривизной силовых линий. Несмотря на значительную работу по теоретическому исследованию колебаний горячей плазмы в кривом магнитном поле, многие вопросы по-прежнему остаются неясными. Отчасти это связано с тем, что для изучения колебаний обычно используется двумерно-неоднородная модель с непостоянной кривизной силовых линий, математические методы исследования которой разработаны еще недостаточно.

Для разрешения этих трудностей в настоящей работе рассмотрена одномерно-неоднородная цилиндрическая модель среды, в которой силовые линии считаются концентрическими окружностями, и все равновесные параметры (давление P_0 , магнитное поле B_0 , альвеновская скорость c_A) изменяются только поперек магнитных оболочек. Несмотря на относительную простоту этой модели, она сохраняет та-

кие базовые черты магнитосферной плазмы, как кривизна силовых линий и радиальная неоднородность. С другой стороны, эта модель позволяет обойти многие математические трудности, характерные для двумерно-неоднородных моделей.

Особый упор в работе делается на рассмотрение поперечной структуры моды. По существу решается та же задача, что и в классических работах [18, 38, 48]: нахождение пространственной структуры волны при заданной частоте. Актуальность этой проблемы заключается в том, что поперечная структура волн с $m \gg 1$ в последние годы интенсивно изучается экспериментально с помощью спутников [47] и радаров [49]. Возможна и обратная постановка задачи: при заданной поперечной структуре (фиксации радиальной (k_r) и азимутальной (k_y) составляющих волнового вектора) найти спектр частот собственных колебаний системы [1, 12, 13, 21, 35, 45]. Такая постановка является более естественной для изучения МГД-неустойчивостей плазмы. Этот случай также кратко рассмотрен в предлагаемой работе.

УРАВНЕНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ

Полагаем, что статическое равновесное состояние плазмы обладает симметрией цилиндра круглого сечения, а магнитные поверхности представляют собой вложенные цилиндры (рис. 1). Силовые линии считаются концентрическими окружностями, все равновесные величины плазмы и магнитного поля зависят только от радиальной координаты r , являющейся также радиусом кривизны силовой линии. Координата $l_{||}$ направлена вдоль силовой линии, координата y играет роль азимутальной координаты.

Условие равновесия плазмы имеет вид

$$P - \frac{1}{c} \vec{J} \cdot \vec{B}, \quad (1)$$

где P , \vec{J} и \vec{B} — равновесные значения давление плазмы, тока и магнитного поля. Если ввести обозначения: $\beta = 8 P / B^2$ — отношение плазменного давления к магнитному, $\beta_p = P^{-1} dP / dr$ и $\beta_B = B^{-1} dB / dr$ — радиальные масштабы изменения давления и магнитного поля соответственно, $\beta_c = r^{-1}$ — проекция вектора кривизны на радиальное направление, то условие равновесия можно записать в виде [12]

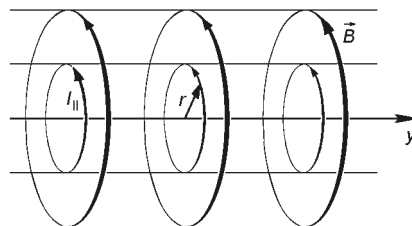


Рис. 1. Цилиндрическая модель плазмы и система координат

$$\frac{\bar{p}}{2} - \bar{v} = 0. \quad (2)$$

Введем следующие обозначения: \bar{r} — смещение плазмы от положения равновесия, \bar{n} — равновесная плотность, \bar{E} — электрическое поле волны, ω — частота волны, \bar{P} , \bar{j} и \bar{b} — возмущения давления, тока и магнитного поля. Тогда уравнение движения запишется в виде [7]

$$\omega^2 \bar{r} = P \frac{1}{c} \bar{j} - \bar{b} - \frac{1}{c} \bar{j} \bar{B}, \quad (3)$$

где возмущенные величины связаны между собой соотношениями

$$\bar{j} = \frac{4}{c} \bar{b}, \quad (4)$$

$$\frac{i}{c} \bar{b} = \bar{E}, \quad (5)$$

$$\bar{E} = \frac{i}{c} \omega \bar{B}, \quad (6)$$

$$P = \bar{P} - P \bar{r}. \quad (7)$$

Введем полное возмущенное давление

$$P_{tot} = P \frac{\bar{B} \bar{b}}{4}. \quad (8)$$

Тогда уравнение (3) может быть записано в виде

$$\omega^2 \bar{r} = P_{tot} \frac{1}{4} (\bar{B} - \bar{b}) - \frac{1}{4} (\bar{b} - \bar{B}) \bar{B} = 0. \quad (9)$$

Исходя из (5) и (6), выражаем возмущение магнитного поля через смещение:

$$\bar{b} = \left[\frac{\bar{r}}{\bar{B}} \right]. \quad (10)$$

Отсюда полное возмущенное давление равно

$$P_{tot} = P \left[\frac{B^2}{4} \left(\bar{r} - 2 \frac{\bar{r}}{c} \right) \right]. \quad (11)$$

Нижний индекс \perp обозначает величину, перпендикулярную к магнитному полю. Ввиду однородности среды вдоль силовой линии и координаты y отдельную фурье-гармонику любой возмущенной величины F можно представить в виде

$$F(r, y, l_{\parallel}, t) = F(r) \exp[i \omega t - i k_{\perp} y - i k_{\parallel} l_{\parallel}]. \quad (12)$$

С помощью (10) и (12) уравнение (9) может быть расписано по компонентам в виде

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) r \frac{2c_A^2}{r} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{2c_r}{r} 2P_p \frac{r}{r} - 2ik_y c_A^2 \frac{y}{r} \frac{d}{dr} P_{tot}, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) y ik_y P_{tot}, \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)_{\parallel} ik_{\parallel} \frac{c_T^2}{c_A^2} P_{tot} - 2c_T^2 \frac{r}{r}, \quad (15)$$

где

$$P_{tot} = (c_S^2 - c_A^2) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{ik_y}{y} - ik_{\parallel} c_S^2_{\parallel} - 2c_A^2 \frac{r}{r}. \quad (16)$$

Здесь c_A , c_S и c_T — альвеновская, звуковая и касповая скорости соответственно, определяемые как

$$c_A^2 = \frac{B^2}{4}, \quad c_S^2 = \frac{P}{\rho}, \quad c_T^2 = \frac{c_A^2 c_S^2}{c_A^2 + c_S^2}.$$

Этим скоростям соответствуют частоты $\omega_A = k_{\parallel} c_A$, $\omega_S = k_{\parallel} c_S$ и $\omega_T = k_{\parallel} c_T$, смысл которых будет прояснен ниже.

Выразим в (14), (15) амплитуды y и $_{\parallel}$ через r и P_{tot} , подставим получившееся значение в (16). После некоторых алгебраических преобразований находим

$$P_{tot} = \frac{2c_A^2}{k_y^2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{2c_r}{r} - \frac{2c_S^2}{1} \frac{2}{\frac{2}{T}}, \quad (17)$$

где c_S^2/c_A^2 и

$$2 \frac{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)}{\left(c_A^2 - c_S^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)}. \quad (18)$$

Подставляя P_{tot} из (17) и y из (14) в (13), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для радиальной составляющей смещения r :

$$\frac{d}{dr} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{2c_A^2}{r} \frac{d}{dr} (r \frac{r}{r}) - r \frac{d}{dr} \frac{2c_A^2}{r^2} \frac{2}{k_y^2} \frac{2}{r} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) r - 2P_p \frac{r}{r} \frac{4}{k_y^2} \frac{2c_A^2}{r} - k_y^2 \frac{2c_S^2}{(c_A^2 - c_S^2) \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right)} r = 0. \quad (19)$$

В однородной плазме с нулевой кривизной силовых линий ($c_r = 0$ при $r \rightarrow \infty$) из (19) получается хорошо известное дисперсионное уравнение для МГД-волн [8]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) [4k^2 (c_A^2 - c_S^2) - k^2 k_{\parallel}^2 c_A^2 c_S^2] = 0, \quad (20)$$

где $k^2 = k_y^2 + k_{\parallel}^2$. Первая скобка в этом уравнении описывает альвеновские волны, вторая — две ветви магнитозвуковых колебаний, быстрый (БМЗ) и медленный (ММЗ) магнитный звук.

Из структуры уравнения (19) следует, что в неоднородной плазме при конечных k_y и k_{\parallel} оно имеет сингулярности в точках, где выполняются равенства

$$k_A^2(r) = k_{\parallel}^2(r) \quad (21)$$

и

$$k_T^2(r) = k_{\parallel}^2(r) \quad (22)$$

Первое условие определяет альвеновский континуум, второе — касповый, или ММЗ-континуум.

Сингулярные магнитные поверхности имеют радиальные координаты r_A и r_T , являющиеся решениями уравнений (21) и (22) соответственно. В дальнейшем точки r_A и r_T будем называть точками альвеновского и каспового (или ММЗ) резонанса соответственно.

Касповая частота $k_T^2 = k_{\parallel}^2 c_T^2$ всегда меньше альвеновской $k_A^2 = k_{\parallel}^2 c_A^2$. В реальной магнитосфере альвеновская частота убывает с расстоянием от Земли. Отсюда следует, что при данной частоте касповый резонанс расположен ближе к Земле, чем альвеновский ($r_T < r_A$).

АЗИМУТАЛЬНО-МЕЛКОМАСШТАБНЫЕ ВОЛНЫ

В приближении азимутальной мелкомасштабности ($k_y = k_{\parallel}$ и $k_y L \gg \gg 1$, где L — характерный масштаб поперечной неоднородности) уравнение (19) допускает упрощение:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{dr} r^2 \right) \right] - \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{d}{dr} r \right) \right] - k_y^2 \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{d}{dr} r^2 \right) \right] - \frac{4k_y^2}{2} \frac{c^2 c_T^2}{r^2} = 0. \quad (23)$$

При получении этого уравнения предполагалось выполнение неравенства $k_y \ll k_A$. Как видно из (18), это неравенство может не выполняться в узкой окрестности точки ММЗ-резонанса. Этот регион должен анализироваться отдельно.

Главным отличием уравнения (23) от (19) является отсутствие членов, соответствующих БМЗ. Это связано с тем, что волна с частотой $\ll k_y c_A$ находится в области непрозрачности БМЗ [40].

Наличие в уравнении (23) большого параметра, пропорционального величине k_y^2 , дает основание воспользоваться ВКБ-приближением по радиальной координате. Необходимым условием применимости ВКБ-приближения является условие $k_y L \gg 1$, достаточное условие будет приведено ниже.

Представим искомую величину в виде

$$r(r) = \exp[iQ(r)]. \quad (24)$$

Здесь фаза Q разлагается в асимптотический ряд по параметру k_y :

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots \quad (25)$$

где $Q_0 = O(k_y^1)$, $Q_1 = O(k_y^0)$, $Q_2 = O(k_y^{-1})$ и т. д. Для начала ограничимся главным порядком ВКБ-приближения, т. е. найдем только главный член разложения (25). Введем определение:

$$k_r = \frac{dQ_0}{dr}. \quad (26)$$

Величину $k_r(r, \omega)$ можно назвать радиальной составляющей волнового вектора, однако необходимо помнить, что в отличие от азимутальной составляющей k_y величина k_r не является независимым параметром, а определяется в конечном итоге из решения уравнения (23).

Подставляя (24) в (23), с учетом (25), (26) получаем зависимость квадрата радиальной составляющей волнового вектора от радиальной координаты и частоты:

$$k_r^2(r, \omega) = k_y^2 - \frac{k_y^2}{2} \frac{c_A^2}{c^2} \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4}{2} \frac{\omega^2 c_T^2}{c^2} \right). \quad (27)$$

В пределе однородной плазмы с нулевой кривизной силовых линий ($\omega_c = 0$, т. е. $r \rightarrow \infty$) это уравнение приводится к виду

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_A^2} \right) \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_T^2} \right) = 0. \quad (28)$$

Первая скобка описывает альвеновские волны, вторая — ММЗ в приближении $k_{\parallel} = k$. Главным отличием (27) от (28) является наличие слагаемых, описывающих сцепление альвеновской и медленной магнитозвуковой мод из-за кривизны силовых линий. Выражение (27) согласуется с дисперсионным уравнением для сцепленных альвеновской и ММЗ-мод, полученным в работах [9, 12, 30, 35] и ряде других.

Как видно из формулы (27), функция $k_r^2(r)$ имеет полюсы в резонансных точках r_A и r_T . Она обращается в нуль в точках отсечки, определяемых из соотношения

$$\left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_A^2} \right] \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega^2}{c_T^2} \right] = 4 \frac{\omega^2}{c^2} \frac{c_T^2}{c^2}. \quad (29)$$

Корни этого уравнения (частоты отсечки) определяются из соотношения, полученного в работе [12]:

$$\frac{\omega^2}{c_A^2} = \frac{(1 - \frac{H}{\omega}) k_{\parallel}^2}{2} + \frac{H \sqrt{D}}{2}, \quad (30)$$

где

$$H = \frac{c}{2} [2 - \frac{c}{c_p} (1 - \frac{1}{2})], \quad D = (k_{\parallel}^2 - H)^2 - 4k_{\parallel}^2 \frac{c^2}{c_T^2}.$$

Поскольку D является положительной величиной, квадраты частот отсечки являются реальными. Исходя из (30), можно найти следующие соотношения между характеристическими частотами:

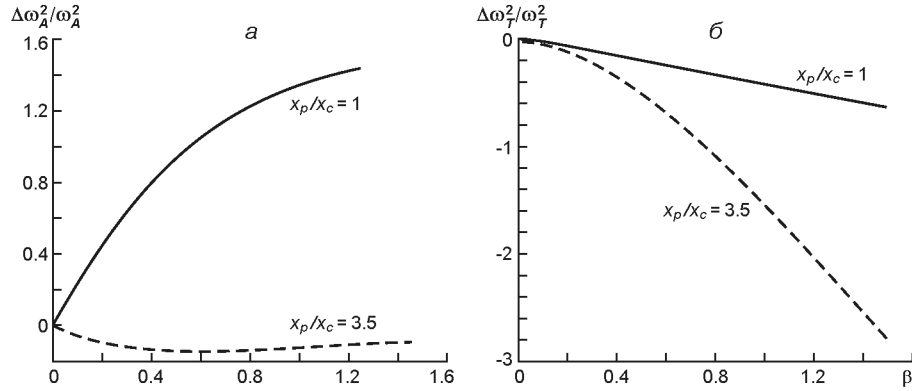


Рис. 2. Величины $(\omega_A^2 - \omega_A^2)/\omega_A^2$ (а) и $(\omega_T^2 - \omega_T^2)/\omega_T^2$ (б) как функция β для двух разных значений отношения x_p/x_c

$$\omega_T^2 = \frac{c_A^2}{2} [k_{\parallel}^2 H \sqrt{D}] \quad (31)$$

(рис. 2). Отсюда следует выполнение неравенств $\omega < \omega_T < \omega_A$. Частота может быть как больше, так и меньше альвеновской резонансной частоты ω_A . Последнее имеет место при резком уменьшении давления с расстоянием от Земли. Удобные выражения для приближенных значений частот можно получить при условии $(c_A/k_{\parallel})^2 \ll 1$:

$$\omega_T^2(r) \approx 1 - \frac{4}{k_{\parallel}^2} \frac{c_c^2 c_T^2}{c_A^2}, \quad (32)$$

$$\omega_A^2(r) \approx 4 \frac{c_c^2 c_T^2}{c_A^2} \frac{c_p^2}{c_c^2}. \quad (33)$$

Как видим, частота ω ближе к альвеновской резонансной частоте, — к частоте ММЗ-резонанса. Как видно из выражения (30), при условии

$$k_{\parallel}^2 \gg \frac{c_p^2}{c_c^2} \quad (34)$$

частота отсечки является чисто мнимой величиной ($\omega^2 < 0$) [12]. Это условие реализуется при $\beta \gg \beta_c$, т. е. в плазме с достаточно большим отрицательным градиентом давления. В этом случае имеет место баллонная неустойчивость [15, 16, 35]. Более подробно этот случай будет рассмотрен ниже.

Предполагая значения частот отсечки ω_p, ω_c известными, уравнение (27) можно переписать в виде

$$k_r^2(r, \omega) = k_y^2 \frac{\omega^2 - \omega_p^2(r)}{\omega^2 - \omega_A^2(r)} \frac{\omega^2 - \omega_T^2(r)}{\omega^2 - \omega_c^2(r)}. \quad (35)$$

График этой зависимости показан на рис. 3.

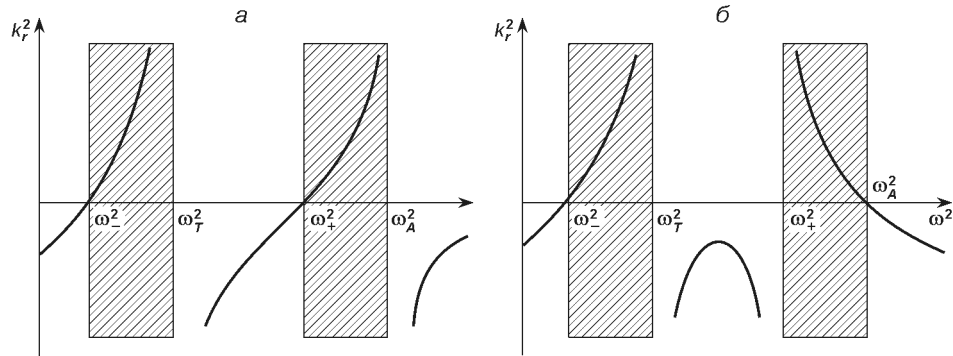


Рис. 3. Зависимость квадрата радиальной составляющей волнового вектора от квадрата частоты в случаях $\omega_A < \omega_T$ (а) и $\omega_A > \omega_T$ (б)

В точках отсечки, где $k_r^2(r) = 0$, волна становится нераспространяющейся. Координаты этих точек r_+ , r_- определяются как решения уравнений

$$k_r^2(r) = 0 \quad (36)$$

и

$$k_r^2(r) = 0 \quad (37)$$

Для нахождения зависимости квадрата радиального волнового вектора от радиальной координаты необходимо знать положение точек r_A , r_T , r_+ и r_- , и в конечном итоге — вид функций $k_A^2(r)$, $k_T^2(r)$, $P(r)$, $c(r)$. Поскольку $\omega_A > \omega_T$ и в наиболее типичном случае функция $k_A^2(r)$ является убывающей, точка r_A должно располагаться дальше от Земли, чем r_T . Обычно функции $k_A^2(r)$ и $k_T^2(r)$ также убывают с расстоянием от Земли, поэтому точка отсечки r_+ располагается ближе к Земле, чем касповый резонанс r_T . Взаимное расположение точек r_A и r_+ в принципе может быть любым, но более типичным является случай $r_+ > r_-$ (рис. 4).

В любом случае, как видно из формулы (35), имеются две области локализации волны (области прозрачности), где выполняется не-

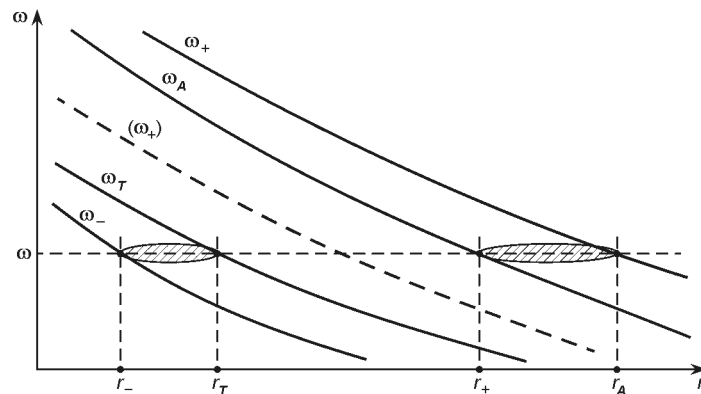


Рис. 4. Поведение функций $k_A^2(r)$, $k_T^2(r)$, $P(r)$ и $c(r)$ в магнитосфере и взаимное расположение характерных точек r_A , r_T , r_+ и r_- (для функции $k_A^2(r)$ приведены оба варианта, менее вероятный показан штриховой линией). Области прозрачности волны заштрихованы

равенство $k_r^2(r) > 0$. Одна из них примыкает к поверхности альвеновского резонанса r_A и ограничена поверхностью отсечки r (альвеновская область прозрачности). Вторая примыкает к поверхности каспового резонанса r_T и ограничена поверхностью отсечки r (область прозрачности ММЗ). Ввиду выполнения неравенств $r_A < r < r_T$ области прозрачности не перекрываются.

В некоторых случаях функции $k_A(r)$, $k_T(r)$, $k(r)$ и $k_y(r)$ могут иметь экстремумы. В таких регионах возможно существование альвеновских или ММЗ-волн с дискретным спектром. Эта возможность не будет рассматриваться в данной работе.

Как уже было отмечено выше, неравенство $k_y L \gg 1$ является только необходимым, но не достаточным условием применимости ВКБ-приближения. Для применимости этого приближения необходимо также, чтобы в области прозрачности волны укладывалось количество длин волн, значительно превосходящее единицу. Аналитически это условие можно сформулировать в виде

$$k_y L \frac{|A|}{A} \gg 1 \quad (38)$$

для альвеновской области прозрачности и

$$k_y L \frac{|T|}{T} \gg 1 \quad (39)$$

для ММЗ-области прозрачности. Кроме того, ВКБ-приближение заведомо неприменимо вблизи точек резонансов и отсечек, которые должны рассматриваться отдельно, как это было сделано, например, в работах [9, 38].

При исследовании ММЗ-области прозрачности возникает дополнительная трудность: как было указано выше, при получении уравнения (23) использовалось приближение $k_y \ll k_{y0}$, которое не может выполняться в узкой окрестности точки ММЗ-резонанса. Действительно, как видно из (18), $k_y^2 \approx (k_{y0}^2 - \frac{2}{T})^{-1}$. Если приближение $k_y \ll k_{y0}$ не выполняется во всей ММЗ-области прозрачности, уравнение (23) там неприменимо, и следовательно, соотношения (29), (35) не дают корректного описания дисперсионных свойств волны.

Условие $k_y \ll k_{y0}$ заведомо не выполняется во всей ММЗ-области прозрачности, если оно не выполняется хотя бы для частоты отсечки r . Рассмотрим случай $r \ll 1$. Подставив в (18) значение k_y из выражения (32) и положив там $k_A = k_T = k_S = k_T$, что справедливо при $r \ll 1$, получим, что условие $k_y \ll k_{y0}$ сводится к виду

$$k_y^2 \ll \frac{k_{\parallel}^4}{2c} \quad (40)$$

Для главной гармоники величины k_{\parallel} и c имеют один порядок. Следовательно, условие $k_y \ll k_{y0}$ эквивалентно условию $k_y \ll k_{\parallel}$, что заведомо выполняется для азимутально-мелкомасштабных волн.

Таким образом, можно гарантировать, что в значительной части ММЗ-области прозрачности уравнение (23) и дисперсионные соотношения (29), (35) применимы для описания волны. Это не отменяет того факта, что в непосредственной окрестности ММЗ-резонанса уравнение (23) неприменимо. В частности, для описания сингулярности на поверхности каспового резонанса необходимо использовать общее уравнение (19).

ОБЛАСТЬ ЛОКАЛИЗАЦИИ АЛЬВЕНОВСКОЙ ВОЛНЫ

В более ранних работах было показано, что в магнитосфере альвеновская резонансная частота на 1-2 порядка превосходит касповую [13, 20, 34, 37]. В конечном итоге это связано с тем, что параметр достигает значений порядка единицы только в узкой области вблизи экватора и быстро стремится к нулю по мере приближения к ионосфере за счет схождения силовых линий. Поэтому для исследования альвеновской области прозрачности в уравнении (23) можно положить $k_r(r) \ll k_A(r)$, $\ll 1$. Тогда это уравнение сведется к виду

$$\frac{d}{dr} [k^2 - k_A^2(r)] - \frac{d}{dr} k_r^2 = k_y^2 [k^2 - k_A^2(r)] = 0, \quad (41)$$

где частота отсечки определяется из соотношения (33). В случае альвеновской области прозрачности резонансную поверхность называют еще тороидальной поверхностью, а поверхность отсечки — полоидальной поверхностью, поскольку мода на этих поверхностях имеет соответственно тороидальную и полоидальную поляризацию [38, 39, 41]. Эта терминология связана с тем, что в альвеновской волне плазма колеблется перпендикулярно к поперечному волновому вектору. При $k_r \gg k_y$ плазма смещается в азимутальном направлении и, ввиду замороженности плазмы, в том же направлении колеблется силовая линия. В противоположном случае ($k_y \gg k_r$) смещение плазмы и колебание силовой линии происходит в радиальном направлении.

Квадрат поперечной составляющей волнового вектора оказывается равным

$$k^2(r) = k_r^2 + k_y^2 = k_y^2 \frac{k_A^2}{k_r^2}. \quad (42)$$

Таким образом, конечное давление приводит к появлению зависимости поперечной составляющей волнового вектора от частоты альвеновской волны [28, 31, 38], в то время как в однородной плазме поперечной дисперсии альвеновской волны нет. Соответственно, учет кривизны приводит к появлению поперечной составляющей групповой скорости волны.

Вблизи резонансной точки квадрат радиальной компоненты волнового вектора обладает сингулярностью типа полюса: $k_r^2 = (r - r_A)^{-1}$. С другой стороны, известно, что решение уравнения типа (41) вблизи

резонансной точки обладает логарифмической сингулярностью, обход которой в соответствии с правилами аналитического продолжения приводит к разрыву решения [5]. Наличие разрыва приводит к скачку в потоке энергии, что, в свою очередь, приводит к поглощению энергии в точке резонанса. Покажем, что такое поведение решения согласуется с результатами решения в ВКБ-приближении.

Вблизи точки резонанса функцию $\psi_A^2(r)$ можно разложить в ряд с точностью до линейного члена. Тогда

$$\psi_A^2(r) \approx \psi_A^2(r_A) + \frac{d\psi_A^2(r)}{dr} \Big|_{r=r_A} (r - r_A),$$

где $l = [(d\psi_A^2(r)/dr) / \psi_A^2(r_A)]^{-1}$ — масштаб изменения функции $\psi_A^2(r)$ вблизи резонансной поверхности. Теперь уравнение (41) допускает дальнейшее упрощение:

$$\frac{d}{dr}(r - r_A) \frac{d}{dr} \psi_A^2(r) - (k_y^2 l^2) \psi_A^2(r) = 0, \quad (43)$$

где величина $k_y^2 l^2 = [(\psi_A^2(r_A) / \psi_A^2(r_A))] / \psi_A^2(r_A)$ считается неизменной вблизи точки резонанса. Граничным условием для этого уравнения будем считать убывание в области непрозрачности, т. е. при $r - r_A > 0$.

В дальнейшем для определенности будем полагать $k_y^2 l^2 > 0$. Введем новое обозначение: $s = (k_y^2 l^2)^{-1/2} (r - r_A)$. Как мы увидим ниже, s является характерной длиной волны вблизи точки сингулярности. Введем новую переменную: $s = 2\sqrt{(r - r_A)/l}$, подразумевая $r - r_A > 0$, т. е. рассматривая область непрозрачности. Тогда уравнение сводится к виду

$$\frac{d}{ds} s \frac{d}{ds} \psi_A^2(r) - s \psi_A^2(r) = 0. \quad (44)$$

Это модифицированное уравнение Бесселя нулевого порядка, имеющее решения $K_0(s)$ и $I_0(s)$. Второе из них не удовлетворяет граничному условию в области непрозрачности, поэтому решение уравнения можно записать в виде

$$\psi_A^2(r) = \text{const} K_0 \left(2\sqrt{\frac{r - r_A}{l}} \right). \quad (45)$$

В дальнейшем константа будет положена равной единице.

Это решение обладает логарифмической сингулярностью в точке $s = 0$. Асимптотика решения вдали от сингулярности имеет вид

$$\psi_A^2(r) \approx \frac{\sqrt{\pi/4}}{[(r - r_A)/l]^{1/4}} e^{-2\sqrt{(r - r_A)/l}}. \quad (46)$$

Аналитическое продолжение решения (45) в области прозрачности волны $r - r_A < 0$ получается при обходе особенности в верхней полуплоскости комплексного r :

$$\psi_A^2(r) = \frac{i}{2} J_0 \left(2\sqrt{\frac{r_A - r}{l}} \right) - \frac{1}{2} Y_0 \left(2\sqrt{\frac{r_A - r}{l}} \right). \quad (47)$$

Асимптотика решения в области прозрачности имеет вид

$$r \frac{\sqrt{l/4}}{[(r_A - r)/l]^{1/4}} e^{2i\sqrt{(r_A - r)/l} - i/4}. \quad (48)$$

Это выражение описывает решение при выполнении условий

$$\ll r_A - r \ll r - r_A.$$

Решение (47) сшивается с решением ВКБ. Решая уравнение (41) в ВКБ-приближении с точностью до первого порядка, находим

$$r \frac{1}{\sqrt{k_r [k_A^2(r) - k^2]}} C_1 \exp(i \int k_r(r) dr) + C_2 \exp(-i \int k_r(r) dr), \quad (49)$$

где

$$k_r^2(r, \theta) = k_y^2 - \frac{k^2}{2} \frac{d^2(r)}{dr^2}, \quad (50)$$

C_1, C_2 — константы, определяемые из условия сшивки с асимптотикой (48). Как нетрудно убедиться, в области $r_A - r \ll r - r_A$ решение (49) совпадает с (48) при $C_2 = 0$ и

$$C_1 = \sqrt{\frac{l}{4}} \frac{1}{A} \sqrt{\frac{0}{l}} \exp(-i/4) \exp(i \int_{r_A}^r k_r(r) dr).$$

Рассмотрим более подробно поведение решения вблизи особенности. Асимптотика решений (45) и (47) при $r = r_A$ может быть записана в виде

$$r \frac{1}{2} \ln \frac{r - r_A}{r_A - r} - \frac{i}{2} \ln(r_A - r), \quad (51)$$

где $\ln(r_A - r)$ — ступенчатая функция Хевисайда. Скачок $i/2$ возник при обходе логарифмической особенности; как известно, разрыв решения приводит к поглощению энергии волны в точке резонанса [5]. Как нетрудно видеть из выражений (14), (15), (17), продольная составляющая смещения также имеет логарифмическую сингулярность, в то время как азимутальная составляющая имеет особенность типа полюса:

$$y \sim \frac{1}{r - r_A}. \quad (52)$$

Таким образом, при приближении к точке резонанса $r \rightarrow r_A$ $y \sim \frac{1}{r - r_A} \rightarrow \infty$.

Важным отличием рассмотренной нами плазмы с кривыми силовыми линиями от плазмы с прямыми силовыми линиями («box model») [18, 48] является осцилляторный характер решения (в области прозрачности волны), причем длина волны уменьшается по мере приближения к особенности. Это соответствует увеличению радиальной составляющей волнового вектора при приближении к особенности, полученное в ВКБ-приближении (35).

БАЛЛОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ

Кратко остановимся на неустойчивых баллонных модах. Положим неравенство (34) выполненным. В этом случае частота отсечки является чисто мнимой величиной, $\omega^2 = -|\omega_z|^2 < 0$. Введем инкремент неустойчивости k_r и перепишем уравнение (35) в виде

$$k_r^2(r, \omega) = k_y^2 \frac{\omega^2 + |\omega_z|^2}{\omega^2 - \omega_A^2} \frac{|\omega_z|^2}{\omega^2 - \omega_T^2}. \tag{53}$$

Видно, что условие существования неустойчивых мод $k_r^2 > 0$ реализуется при условии $|\omega_z|^2 > \omega_A^2$. Поэтому максимальный инкремент баллонной неустойчивости равен

$$k_{r, \max}^2 = \frac{|\omega_z|^2}{\omega_A^2} \tag{54}$$

и достигается при $k_r = 0$. При $\omega = 0$ реализуются долгоживущие баллонные моды с k_r^2 , равным

$$(k_r^*)^2 = k_y^2 \frac{|\omega_z|^2}{\omega_T^2}. \tag{55}$$

Кроме того, при $k_r = k_r^*$ могут существовать квазистационарные касповые моды.

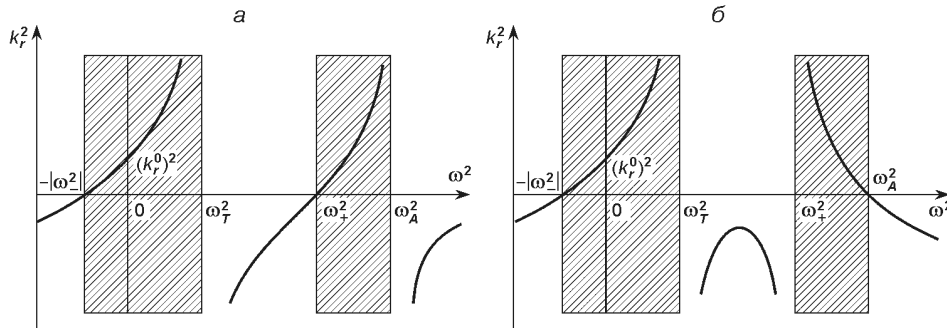


Рис. 5. Зависимость квадрата радиальной составляющей волнового вектора от квадрата частоты для баллонной неустойчивости $\omega_A^2 < \omega_z^2$ (а) и $\omega_A^2 > \omega_z^2$ (б)

Качественно зависимость (53) приведена на рис. 5. Видно, что появляется дополнительная область прозрачности для неустойчивых баллонных мод, которая примыкает к области распространения касповых волн.

В случае $k_r = 0$ и $\omega = 0$ из (53) следует $|\omega_z|^2 = \omega_A^2$, или

$$k_{\parallel}^2 = \frac{p}{c}, \tag{56}$$

т. е. получаем уравнение, определяющее границу баллонной неустойчивости.

ОБСУЖДЕНИЕ

Картина распространения волны, рассмотренная в настоящей работе, качественно сходна с той, что была получена в двумерно-неоднородной плазме. В частности, в работах [9, 28, 30, 38, 39, 41] было показано, что появление резонансных мод приводит к условию $k_r / k_y = 0$.

В работе [20] из достаточно общих соображений были сконструированы резонансные уравнения. Позднее в работе [24] в предположении $k_r / k_y = 0$ были получены те же самые уравнения, что и в [20]. В данной работе, как и в [9, 24, 28, 30, 38, 39, 41], было показано, что условие определяет граничные полоидальные моды, которые еще могут реализовываться в неоднородной плазменной системе. В работах [16, 22, 24] в предположении $k_r / k_y = 0$ также были получены уравнения для полоидальных мод, которые в пределе «холодной» плазмы $\omega = 0$ совпадали с уравнениями работы [38] для полоидальных мод, а при конечном ω — с уравнениями работы [9]. Как и в двумерно-неоднородной плазме, кривизна силовых линий в рассмотренной нами одномерно-неоднородной модели приводит осцилляторному характеру решения в области прозрачности волны с длиной волны, уменьшающейся по мере приближения к точке резонанса [9, 28, 30, 38, 39, 41].

Как показано выше, существенной особенностью полоидальных мод является то обстоятельство, что они могут быть неустойчивыми. Этот же результат известен и для двумерно-неоднородной плазмы, в которой он исследован в пределе $k_r / k_y = 0$, т. е. для полоидальных мод [14, 16, 23]. Полученный нами критерий баллонной неустойчивости (34) совпадает с выведенным в работах [12, 16, 35], причем, как и в этих работах, неустойчивость может иметь место только на ММЗ-ветке колебаний.

Таким образом, картина распространения УНЧ-мод в неоднородной 2-мерной плазме полностью согласуется со всеми особенностями распространения таких же мод в одномерно-неоднородной плазме. Это наводит на мысль перенести полученный в данной работе результаты на 2- или 3-мерные плазменные конфигурации со сложной геометрией магнитного поля, к которым относится и магнитосфера. В таких конфигурациях задачу о нахождении собственных мод удается сформулировать и решить только при некоторых предположениях о поперечной структуре собственных мод, что в общем случае сделать достаточно сложно [17, 19, 27]. Из вышеизложенного следует, что для нахождения этих мод можно использовать ВКБ-приближение. В рамках этого приближения поведение поперечной структуры мод будет определяться резонансными точками и точками отсечки. Наложив на эйконал условие $k_r / k_y = 0$ можно найти резонансные моды, а наложив условие $k_r / k_y \neq 0$ — полоидальные моды [24, 29]. Остальная часть непрерывного спектра может быть при необходимости рассчитана численно.

Важнейшим следствием неоднородности вдоль силовых линий является возможность возникновения резонаторов вдоль силовых линий [11, 32, 36, 44]. Дополнительные трудности создает бесстолкновительный характер космической плазмы, что ставит под сомнение применимость МГД. Однако в случае альвеновской моды уравнения гидродинамики и кинетики совпадают с точностью до членов $O(\epsilon)$ включительно [31]. Вопрос о существовании ММЗ в магнитосферной плазме с учетом ее бесстолкновительного характера не решен [43], однако в бесстолкновительной плазме может существовать другая мода компрессионных колебаний — дрейфовая компрессионная мода [31, 43], причем сцепление этой моды с альвеновской также может привести к баллонной неустойчивости [33].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе для одномерно-неоднородной плазмы, находящейся в магнитном поле с переменной кривизной силовых линий, проанализированы поперечная структура и условия распространения азимутально-мелкомасштабных мод с ультранизкими частотами. Для этих мод получено дифференциальное уравнение второго порядка (19), с помощью которого в ВКБ-приближении исследованы моды с непрерывным спектром. Показано, что области распространения мод лежат между точками отсечки и резонансными точками этого уравнения в согласии с результатами работ [9, 28, 30, 38, 39, 41]. В работе найдена поперечная структура мод вблизи указанных критических точек. Показано, что знание поперечной структуры вблизи этих точек эквивалентно знанию резонансных частот и частот отсечки. Этот результат крайне важен для проблемы нахождения собственных мод в двух- и трехмерных магнитных конфигурациях, для которых выделить продольные структуры и найти собственные частоты мод не всегда возможно без знания поперечной структуры. Знание поперечной структуры вблизи критических точек существенно упрощает эту задачу и позволяет найти как резонансные частоты, так и частоты отсечки. Собственные частоты, лежащие между этими частотами, также могут быть найдены в ВКБ-приближении, что показано в работах [1, 13]. Изложенный подход был использован в работе для нахождения области прозрачности неустойчивых баллонных мод (см. рис. 3, 4) и максимального инкремента этих мод. Также в рамках предложенного подхода обнаружены долгоживущие баллонные и касповые моды, лежащие вблизи границы устойчивости баллонных мод.

Работа выполнена в рамках Комплексной программы НАН Украины по космическим исследованиям и Программы НАН Украины по физике плазмы (О. К. Черемных), Программы № 22 Президиума Российской академии наук (Д. Ю. Климушкин, Д. В. Костарев). Работа поддержана грантами ДФФД Ф53/177-2013 (О. К. Черемных), РФФИ

12-05-00121-а (Д. Ю. Климушкин), РФФИ 13-05-90436-укр-ф-а и 14-05-00588-а (Д. В. Костарев). Авторы выражают признательность А. С. Парновскому и П. Н. Магеру за обсуждение.

1. *Агапитов А. В., Парновский А. С., Черемных О. К.* Спектр поперечно-мелкомасштабных возмущений во внутренней магнитосфере Земли // Кинематика и физика небес. тел.—2006.—**22**, № 6.—С. 387—401.
2. *Агапитов А. В., Черемных О. К.* Генерация солнечным ветром собственных УНЧ-мод магнитосферы Земли // Космічна наука і технологія.—2008.—**14**, № 4.—С. 72—81.
3. *Агапитов А. В., Черемных О. К.* Поляризация резонансных УНЧ-возмущений в магнитосфере Земли // Кинематика и физика небес. тел.—2011.—**27**, № 3.—С. 17—27.
4. *Белаховский В. Б., Ролдугин В. К.* Возбуждение Pc5 пульсаций при смене знака Vz-компоненты ММП // Геомагнетизм и аэрономия.—2008.—**48**, № 2.—С. 188—194.
5. *Гуссенс М.* Магнитогидродинамические волны и волновой нагрев неоднородной плазмы // Космическая магнитная гидродинамика / Под ред. Э. Приста, А. Худа. — М.: Мир, 1995.—440 с.
6. *Золотухина Н. А.* Резонансные свойства Psi5/Psc5 на геостационарной орбите // Геомагнетизм и аэрономия.—2009.—**49**, № 4.—С. 460—471.
7. *Кадомцев Б. Б.* Гидромагнитная устойчивость плазмы // Вопросы теории плазмы / Под. ред. М. А. Леонтовича. — М.: Госатомиздат, 1963.—Вып. 2.—С. 132—176.
8. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988.—304 с.
9. *Климушкин Д. Ю.* Пространственная структура азимутально-мелкомасштабных гидромагнитных волн в аксиально-симметричной магнитосфере с конечным давлением плазмы // Физика плазмы.—1997.—**23**, № 10.—С. 931—944.
10. *Мазур В. А., Чуйко Д. А.* Влияние МГД-волновода во внешней магнитосфере на отражение гидромагнитных волн от сдвигового течения на магнитопаузе // Физика плазмы.—2013.—**39**, № 12.—С. 1071—1088.
11. *Мазур Н. Г., Федоров Е. Н., Пилипенко В. А.* О возможности отражения альвеновских волн в криволинейном магнитном поле // Физика плазмы.—2004.—**30**, № 5.—С. 450—458.
12. *Мазур Н. Г., Федоров Е. Н., Пилипенко В. А.* Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие их устойчивости в околоземной плазме // Геомагнетизм и аэрономия.—2012.—**52**, № 5.—С. 639—648.
13. *Парновский А. С., Черемных О. К.* Спектр баллонных возмущений с произвольной поляризацией во внутренней магнитосфере Земли // Космічна наука і технологія.—2006.—**12**, № 1.—С.49—56.
14. *Парновский А. С., Черемных О. К.* Желобковые и несжимаемые возмущения во внутренней магнитосфере Земли // Кинематика и физика небес. тел.—2006.—**22**, № 1.—С. 65—75.
15. *Половин Р. В., Демуцкий В. П.* Основы магнитной гидродинамики. — М.: Энергоатомиздат, 1987.—208 с.
16. *Черемных О. К., Данилова В. В.* Поперечно-мелкомасштабные МГД-возмущения в космической плазме с магнитными поверхностями // Кинематика и физика небес. тел.—2011.—**27**, № 2.—С. 63—79.
17. *Bekhor S. H.* The computation of field-line resonance frequencies in general geometries: a tool for improving the understanding of magnetospheric configurations // J. Plasma Phys.—2006.—**72**.—P. 309—327.—DOI:10.1017/S0022377805004150.
18. *Chen L., Hasegawa A.* A theory of long period magnetic pulsations. 1. Steady state excitation of field line resonance // J. Geophys. Res.—1974.—**79**.—P. 1024—1032.—DOI:10.1029/JA079i007p01024.

19. *Cheng C. Z.* MHD field line resonances and global modes in three-dimensional magnetic fields // *J. Geophys. Res.*—2003.—**108A**, N 1.—P. 1002.—DOI:10.1029/2002JA009470.
20. *Cheng C. Z., Chang T. C., Lin C. A., Tsai W. H.* Magnetohydrodynamic theory of field line resonances in the magnetosphere // *J. Geophys. Res.*—1993.—**98A**, N 7.—P. 11339—11347.—DOI:10.1029/93JA00505.
21. *Cheremnykh O. K., Parnowski A. S.* The theory of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // *Adv. Space Res.*—2004.—**33**.—P. 769—773.—DOI:10.1016/S0273-1177(03)00642-2.
22. *Cheremnykh O. K., Parnowski A. S.* Flute and ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth: Stability and influence of the ionospheric conductivity // *Space science: New research* / Ed. by N. S. Maravell. — New York: Nova Science Publishers, 2006.—P. 71—108.
23. *Cheremnykh O. K., Parnowski A. S.* Influence of ionospheric conductivity on the ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // *Adv. Space Res.*—2006.—**37**, N 3.—P. 599—603.—DOI:10.1016/j.asr.2005.01.073.
24. *Cheremnykh O. K., Parnowski A. S., Burdo O. S.* Ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // *Planet. and Space Sci.*—2004.—**55**, N 13.—P. 1217—1229.—DOI:10.1016/j.pss.2004.03.031.
25. *Dmitrienko I. S.* Evolution of FMS and Alfvén waves produced by the initial disturbance in the FMS waveguide // *J. Plasma Phys.*—2013.—**79**.—P. 7—17.—DOI:10.1017/S0022377812000608.
26. *Guglielmi A. V., Potapov A. S.* Note on the dependence of Pc3—4 activity on the solar wind velocity // *Ann. Geophys.*—1994.—**12**.—P. 1192—1196.—DOI:10.1007/s00585-994-1192-z.
27. *Kabin K., Rankin R., Mann I. R., et al.* Polarization properties of standing shear Alfvén waves in non-axisymmetric background magnetic fields // *Ann. Geophys.*—2007.—**25**.—P. 815—822.—DOI:10.5194/angeo-25-815-2007.
28. *Klimushkin D. Yu.* Spatial structure of transversally small-scale hydromagnetic waves in a plane finite-beta model magnetosphere // *Planet. and Space Sci.*—1997.—**45**.—P. 269—279.—DOI:10.1016/S0032-0633(96)00078-5.
29. *Klimushkin D. Yu., Leonovich A. S., Mazur V. A.* On the propagation of transversally-small-scale standing Alfvén waves in a three-dimensionally inhomogeneous magnetosphere // *J. Geophys. Res.*—1995.—**100A**, N 6.—P. 9527—9534.—DOI: 10.1029/94JA03233.
30. *Klimushkin D. Yu., Mager P. N.* On the spatial structure and dispersion of slow magnetosonic modes coupled with Alfvén modes in planetary magnetospheres due to field line curvature // *Planet. and Space Sci.*—2008.—**56**.—P. 1273—1279.—DOI: 10.1016/j.pss.2008.03.002.
31. *Klimushkin D. Yu., Mager P. N.* Spatial structure and stability of coupled Alfvén and drift compressional modes in non-uniform magnetosphere: Gyrokinetic treatment // *Planet. and Space Sci.*—2011.—**59**.—P. 1613—1620.—DOI:10.1016/j.pss.2011.07.010.
32. *Klimushkin D. Yu., Mager P. N., Marilovtseva O. S.* Parallel structure of Pc1 ULF oscillations in multi-ion magnetospheric plasma at finite ion gyrofrequency // *J. Atmos. and Sol.-Terr. Phys.*—2010.—**72**(18).—P. 1327—1332.—DOI:10.1016/j.jastp.2010.09.019.
33. *Klimushkin D. Yu., Mager P. N., Pilipenko V. A.* On the ballooning instability of the coupled Alfvén and drift compressional modes // *Earth Planets Space.*—2012.—**64**.—P. 777—781.—DOI:10.5047/eps.2012.04.002.
34. *Kozlov D. A.* Slow magnetosonic oscillations with $m \gg 1$ in a dipole magnetosphere with rotating plasma // *Int. J. Geomagn. Aeron.*—2008.—**7** (GI3004).—DOI: 10.1029/2006GI000164.
35. *Kozlov D. A., Mazur N. G., Pilipenko V. A., Fedorov E. N.* Dispersion equation for ballooning modes in two-component plasma // *J. Plasma Phys.*—2014.—**80**, N 3.—

- Р. 379—393.
36. Leonovich A. S., Kozlov D. A. On ballooning instability in current sheets // *Plasma Phys. Control. Fusion*.—2013.—**55** (085013).—DOI:10.1088/0741-3335/55/8/085013.
 37. Leonovich A. S., Kozlov D. A., Edemskiy I. K. Standing slow magnetosonic waves in a dipole-like plasmasphere // *Planet. and Space Sci.*—2010.—**58**.—P. 1425—1433.—DOI: 10.1016/j.pss.2010.06.007.
 38. Leonovich A. S., Mazur V. A. A theory of transverse small-scale standing Alfvén waves in an axially symmetric magnetosphere // *Planet. and Space Sci.*—1993.—**41**.—P. 697—717.—DOI: 10.1016/0032-0633(93)90055-7.
 39. Leonovich A. S., Mazur V. A. A model equation for monochromatic standing Alfvén waves in the axially symmetric magnetosphere // *J. Geophys. Res.*—1997.—**102**.—P. 11443—11456.—DOI:10.1029/96JA02523.
 40. Leonovich A. S., Mazur V. A. Structure of magnetosonic eigenoscillations of an axisymmetric magnetosphere // *J. Geophys. Res.*—2000.—**105**.—P. 27707—27716.—DOI:10.1029/2000JA900108.
 41. Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Theory of azimuthally small-scale Alfvén waves in an axisymmetric magnetosphere with small but finite plasma pressure // *J. Geophys. Res.*—2002.—**107**, N A11.—P. 1356.—DOI:10.1029/2001JA009137.
 42. Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Alfvén ship waves: high-m ULF pulsations in the magnetosphere generated by a moving plasma inhomogeneity // *Ann. Geophys.*—2008.—**26**.—P. 1653—1663.—DOI:10.5194/angeo-26-1653-2008.
 43. Mager P. N., Klimushkin D. Yu., Kostarev D. V. Drift-compressional modes generated by inverted plasma distributions in the magnetosphere // *J. Geophys. Res. Space Phys.*—2013.—**118**.—P. 4915—4923.—DOI:10.1002/jgra.50471.
 44. Mager P. N., Klimushkin D. Yu., Pilipenko V. A., Schäfer S. Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma // *Ann. Geophys.*—2009.—**27**.—P. 3875—3882.—DOI:10.5194/angeo-27-3875-2009.
 45. Parnowski A. S. Eigenmode analysis of ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth // *Ann. Geophys.*—2007.—**25**.—P. 1391—1403.—DOI: 10.5194/angeo-25-1391-2007.
 46. Pilipenko V. A., Kozyreva O. V., Engebretson M. J., et al. Dynamics of long-period magnetic activity and energetic particle precipitation during the May 15, 1997 storm // *J. Atmos. and Sol.-Terr. Phys.*—2002.—**64**.—P. 831—843.—DOI:10.1016/S1364-6826(02)00074-3.
 47. Schäfer S., Glassmeier K.-H., Eriksson P. T. I., et al. Spatio-temporal structure of a poloidal Alfvén wave detected by Cluster adjacent to the dayside plasmopause // *Ann. Geophys.*—2008.—**26**.—P. 1805—1817.—DOI:10.5194/angeo-26-1805-2008.
 48. Southwood D. J. Some features of field line resonances in the magnetosphere // *Planet. and Space Sci.*—1974.—**22**.—P. 483—491.—DOI: 10.1016/0032-0633(74)90078-6.
 49. Yeoman T. K., James M., Mager P. N., Klimushkin D. Yu. SuperDARN observations of high-m ULF waves with curved phase fronts and their interpretation in terms of transverse resonator theory // *J. Geophys. Res.*—2012.—**117**.—A06231.—DOI: 10.1029/2012JA017668.
 50. Zolotukhina N. A. Wave effects of sudden impulse and substorm onset in the magnetospheric morning sector on January 4, 2001 // *Geomagn. and Aeronomy*.—2010.—**50**, N 2.—P. 963—969.—DOI:10.1134/S0016793210080062.
 51. Zolotukhina N. A., Mager P. N., Klimushkin D. Yu. Pc5 waves generated by substorm injection: a case study // *Ann. Geophys.*—2008.—**26**.—P. 2053—2059.—DOI:10.5194/angeo-26-2053-2008.