

УДК 524.8

В. И. Жданов, Е. В. Федорова, А. Н. Александров

Астрономическая обсерватория Киевского национального университета имени Тараса Шевченко
04053 Киев, ул. Обсерваторная, 3**Гравитационное движение изображений удаленных источников, обусловленное полем звезд Галактики**

Показано, что гравитационное поле движущихся звезд индуцирует слабое (с максимальным значением порядка 0.1 мксд/год) движение изображений внегалактических источников в плоскости Галактики в направлении ее вращения. Эффект существенно отличается в зависимости от того, содержится ли масса в компактных объектах или же распределена непрерывно.

ГРАВІТАЦІЙНИЙ РУХ ЗОБРАЖЕНЬ ВІДДАЛЕНИХ ДЖЕРЕЛ, ОБУМОВЛЕНИЙ ПОЛЕМ ЗІРОК ГАЛАКТИКИ, Жданов В. І., Федорова О. В., Александров О. М. — Показано, що гравітаційне поле рухомих зірок індукує слабкий (з максимальним значенням порядку 0.1 мксд/рік) рух зображень позагалактичних джерел у площині Галактики в напрямку обертання. Ефект суттєво відрізняється у залежності від того, чи міститься маса в компактних об'єктах, чи розподілена неперервно.

GRAVITATIONAL DRAGGING OF DISTANT SOURCE IMAGES CAUSED BY GALAXY STARS, by Zhdanov V. I., Fedorova E. V., Alexandrov A. N. — It is shown that gravitational field of moving stars induces a small systematic image motion of extragalactic objects in the galactic plane (of the order of 0.1 μ as/yr in maximum). The effect depends essentially on either the mass is located in compact objects or the mass distribution is continuous.

ВВЕДЕНИЕ

Повышение точности определения координат в астрометрии делает необходимым учет все более тонких эффектов общей теории относительности при построении систем отсчета. В перспективе возникает вопрос о движении изображений удаленных источников излучения под действием гравитационного поля, создаваемого движущимися звездами Галактики [5, 9—12]. Далее для краткости мы называем этот эффект гравитационным движением изображений (ГДИ) — в отличие от собственных движений источников. Статическое отклонение положений удаленных источников полем Галактики в моделях с непрерывным распределением массы рассмотрено в работах [6, 7], оно довольно велико (10^{-5} — 10^{-6} рад). Однако наблюдаемым является

лишь изменение такого положения со временем. Эффект ГДИ, обусловленный полями звезд Галактики, имеет порядок величины, измеряемый микросекундами дуги в год. Тем не менее, есть надежда, что измерение подобных величин будет доступным в недалеком будущем. Основание для этого дают разрабатываемые в настоящее время проекты космического интерферометра в оптике (<http://planetquest.jpl.nasa.gov/SIM>) и радиоинтерферометра с космической базой (<http://sgra.jpl.nasa.gov/us-space-vlbi>; <http://www.asc.rssi.ru/radioastron>). Как отмечается в работах [9—12], интерес к этому вопросу связан с тем, что при позиционировании квазаров будет практически невозможно отделить гравитационные эффекты от собственных движений. В этой связи, например, в работе Сажина [9] утверждается о «фундаментальном пределе точности астрометрических измерений». Поскольку положения всех звезд в Галактике неизвестны, на первый план выходит статистический аспект этой задачи. В этой связи в работах [11, 12] получены аналитические соотношения для распределений вероятности, характеризующих случайные движения изображений в достаточно общем случае. Отмечается, что помимо случайной составляющей поле движущихся звезд индуцирует также систематическую составляющую в движении изображений удаленных источников. Смысл этого эффекта рассматривается в нашей работе более подробно.

При учете отклонения света полем звезд Галактики необходимо выделить две составляющие. Во-первых, это случайные блуждания с нулевым средним, характерная величина которых определяется распределением масс в непосредственной близости от луча зрения. При усреднении по большому числу источников этот эффект исчезает. Во-вторых, это систематический коллективный эффект, который определяется в том числе и далекими от луча зрения звездами. Здесь мы не рассматриваем движения изображений, которые можно учесть детерминированным образом, например обусловленные полями Солнца и планет, которые можно отделить в наблюдениях. В задаче о распространении света мы также пренебрегаем малыми пост-постньютоновскими поправками, связанными со скоростью движущихся масс.

ДВИЖЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА, МИКРОЛИНЗИРОВАННОГО ТОЧЕЧНОЙ МАССОЙ

При микролинзировании квазаров звездами нашей Галактики можно пренебречь космологической кривизной пространства-времени и считать, что источник излучения находится на бесконечности. Соответственно, расчет траектории луча света в гравитационном поле микролинз производится на фоне плоского пространства. Вместе с тем в рассматриваемой задаче прицельное расстояние траектории луча относительно звезд может быть сравнимым с расстоянием до них от наблюдателя, что несколько отличает формулу для отклонения луча от стандартного случая микролинзирования. Пусть невозмущенный луч движется из бесконечности вдоль оси z декартовых координат x, y, z к наблюдателю, который находится в начале координат. Пусть положение микролинзирующей точечной массы M есть $(\mathbf{r}, z)$, где $\mathbf{r} = (x, y)$ — поперечная составляющая радиуса-вектора массы, которая лежит в плоскости, ортогональной к лучу зрения, тогда $r = |\mathbf{r}|$ — прицельное расстояние траектории луча относительно этой массы.

В приближении слабого микролинзирования $r \gg (mz)^{1/2}$, где $m = GM/c^2$, угловое смещение изображения дается величиной $m\Psi$, где [9, 11]

$$\Psi(\mathbf{r}, z) = -2 \frac{\mathbf{r}}{r^2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right). \quad (1)$$

Формула (1) получается из более общей формулы для отклонения света [8, 9] в пределе, когда источник находится на бесконечности; ее нетрудно вывести и непосредственно из уравнений изотропных геодезических [1].

Обозначим скорость точечной микролинзы $\mathbf{V} = (\mathbf{v}, w)$, где w — проекция скорости на луч зрения, а двумерный вектор $\mathbf{v}$ представляет поперечную составляющую скорости. В силу (1) изменение относительных положений в системе источник-линза-наблюдатель вызывает движение изображения квазара $m\mathbf{U}$ (в радианах за единицу времени), где [11]

$$\mathbf{U} = \frac{d\Psi}{dt} = -2 \left\{ \frac{1}{r^4} [\mathbf{v}r^2 - 2\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})] \left[1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} + \frac{zr^2}{2(z^2 + r^2)^{3/2}} \right] + \frac{w\mathbf{r} - z\mathbf{v}/2}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \right\}. \quad (2)$$

ДВИЖЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА, МИКРОЛИНЗИРОВАННОГО ЗВЕЗДАМИ ГАЛАКТИКИ

Оценим среднее ГДИ под действием полей всех звезд Галактики для фиксированного направления на источник. Будем считать, что скорость звезды в точке $(\mathbf{r}, z)$ $\mathbf{V}_s(\mathbf{r}, z)$. Вообще говоря, подробное рассмотрение статистики ГДИ должно учитывать распределение по скоростям в каждой точке. Это можно учесть при помощи соотношений [12]. Однако поскольку нас интересует оценка среднего значения, здесь мы полагаем, что скорость звезды однозначно определяется ее положением. Вследствие малости эффекта вклады отдельных звезд, не лежащих прямо на луче зрения, входят линейно, т. е. суммарное смещение изображения равно

$$\Psi_{\text{tot}} = \frac{G}{c^2} \sum_i M_i \Psi(\mathbf{r}_i, z_i),$$

а его движение —

$$\mathbf{U}_{\text{tot}} \equiv \frac{d\Psi_{\text{tot}}}{dt} = \frac{G}{c^2} \sum_i M_i \mathbf{U}(\mathbf{r}_i, z_i, \mathbf{V}_s(\mathbf{r}_i, z_i)),$$

где $(\mathbf{r}_i, z_i)$ — положение i -й звезды. Усредним это выражение с учетом пространственного распределения звезд, причем будем для простоты считать, что звезды независимы, а плотность распределения звезд $f(m, \mathbf{r}, z, t)$ связана со средней плотностью массы $\rho(\mathbf{r}, z, t)$ в Галактике следующим очевидным образом:

$$\int M f(M, \mathbf{r}, z, t) dM = \frac{1}{N_G} \rho(\mathbf{r}, z, t),$$

где N_G — число звезд во всей Галактике. Зависимость от времени в $\rho(\mathbf{r}, z, t)$ введена из-за того, что рассматриваемая система координат связана с источником и наблюдателем, которые движутся относительно Галактики. Переходя от $\mathbf{U}_{\text{tot}}$ к усредненной величине, учитывая вклады отдельных звезд независимо, получим суммарную среднюю скорость увлечения изображения гравитационным полем

$$\langle \mathbf{U}_{\text{tot}} \rangle = \frac{G}{c^2} \int dz \int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}, z, t) \mathbf{U}(\mathbf{r}, z, \mathbf{V}_s(\mathbf{r}, z)). \quad (3)$$

Здесь предполагается, что ρ исчезает вне ограниченной области пространства, занимаемой Галактикой. Легко видеть, что в выражение (3) существенный вклад дают звезды Галактики на любых расстояниях от луча зрения.

Необходимо обсудить насколько применимы полученные формулы, которые не учитывают событий сильного микролинзирования, когда $r \sim (mz)^{1/2}$. Наша цель состоит в том, чтобы получить оценку вклада в $\langle U_{\text{tot}} \rangle$ большого числа звезд, положения которых неизвестны. Здесь возможны крайне редкие события сильного микролинзирования, которые, однако, дают быстрые перемещения изображения и значимый вклад в $\langle U_{\text{tot}} \rangle$. Эти события не описываются формулами (1), (2). Их нетрудно было бы учесть, в том числе и в случае протяженного источника [2, 3]. Однако это здесь и не требуется. Действительно, реальное число радиоисточников, используемых во внегалактической системе отсчета, относительно невелико (в ICRS — порядка 600), поэтому имеет смысл исключить из рассмотрения маловероятные реализации гравитаторов, связанные с подобными событиями, которые вряд ли проявят себя в ближайшие сто лет. Напомним, что вероятность сильного микролинзирования удаленного источника звездами Галактики, когда заметно возрастает яркость изображения, имеет порядок 10^{-6} в год; поэтому, например, в проекте MACHO приходится одновременно отслеживать миллионы звезд. Кроме того, даже если событие сильного микролинзирования объекта ICRS и произойдет, имеется принципиальная возможность выделить его по таким характерным признакам, как возрастание яркости изображения источника, а также относительно быстрое перемещение этого изображения.

Итак, в дальнейшем мы оцениваем среднее значение $\langle U_{\text{tot}} \rangle$ не по всем реализациям звезд, а лишь удовлетворяющим условию слабого микролинзирования (для фиксированного источника), которое наилучшим способом учитывает возможности наблюдений. Оно имеет тот же порядок величины, что и наиболее вероятное значение ГДИ, и позволяет оценить вклад большого числа микролинз, определить положение которых невозможно. Реализации микролинз, соответствующие событиям сильного микролинзирования с $r \sim (mL_G)^{1/2}$, где L_G — пространственный масштаб всей Галактики, отбрасываем. Соответствующую область, строго говоря, необходимо исключить из области интегрирования в (3). Однако, поскольку эта область крайне мала ($(mL_G)^{1/2} \ll L_G$), ее вкладом в (3) можно пренебречь. Корректность такого приближения обеспечивается сходимостью интеграла (3) при малых r .

При наличии распределения звезд по скоростям в каждой пространственной точке можно оценить распределение скоростей ГДИ, используя результаты работы [11]. В этом случае $V_s(\mathbf{r}, z)$ есть среднее значение скорости звезд в точке $(\mathbf{r}, z)$.

ОТЛИЧИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ДВИЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ В СЛУЧАЕ НЕПРЕРЫВНОГО И ДИСКРЕТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАССЫ В ГАЛАКТИКЕ

Гравитационное движение изображений (3) получено в результате усреднения выражения (2), полученного путем дифференцирования смещения (1) по времени. Казалось бы, ГДИ можно получить следующим образом: вычислить среднее смещение изображения

$$\langle \Psi_{\text{tot}} \rangle = \frac{G}{c^2} \int dz \int d^2r \rho(\mathbf{r}, z, t) \Psi(\mathbf{r}, z), \quad (4)$$

после чего вычислить скорость

$$\mathbf{U}_{\text{tot}}^* \equiv \frac{d}{dt} \langle \Psi_{\text{tot}} \rangle = \frac{G}{c^2} \int dz \int d^2r \frac{\partial \rho}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, z). \quad (5)$$

Оказывается, это не так: в данном случае операции усреднения и диффе-

ренцирования не коммутируют, и $U_{\text{tot}}^* \neq \langle U_{\text{tot}} \rangle$. Покажем это. Выражение (5) формально представляет собой ГДИ, вызываемое движением непрерывного распределения массы $\rho = \rho(\mathbf{r}, z, t)$, которое удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{V}_s) = 0.$$

Запишем (5) для каждой векторной составляющей $U_{\text{tot}}^* = \{U_1, U_2\}$, учитывая уравнение непрерывности:

$$U_{\text{tot},i}^* \equiv \frac{G}{c^2} \int dz \int d^2\mathbf{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Psi_i = \frac{G}{c^2} \int dz \int d^2\mathbf{r} [\rho(\mathbf{V}_s \nabla) \Psi_i - \text{div}(\mathbf{V}_s \rho \Psi_i)], \quad i = 1, 2.$$

Несобственный интеграл (5), таким образом, представляется в виде двух слагаемых:

$$U_{\text{tot}}^* \equiv \frac{d}{dt} \langle \Psi_{\text{tot}} \rangle = \frac{G}{c^2} \int dz \int d^2\mathbf{r} \frac{\partial \rho}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, z) = U^{(0)} + U^{(1)},$$

где компоненты вектора $U^{(0)}$ равны

$$U_i^{(0)} = \frac{G}{c^2} \int dz \int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{V}_s \nabla) \Psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Как легко видеть, они совпадают с компонентами выражения (3), а компоненты второго слагаемого — интеграла от полной дивергенции — удобно вычислять в цилиндрических координатах $(\mathbf{r}, \varphi, z)$:

$$\begin{aligned} U_i^{(1)} &= -\frac{G}{c^2} \int dz \int d^2\mathbf{r} \text{div}(\mathbf{V}_s \rho \Psi_i) = \\ &= -\frac{G}{c^2} \int dz \int dr \int d\varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r \Psi_i) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\rho V_\varphi \Psi_i) + r \frac{\partial}{\partial z} (\rho W \Psi_i) \right\} = \\ &= -\frac{G}{c^2} \int dz \int dr \int d\varphi \left\{ \frac{\partial}{\partial r} (r \rho V_r \Psi_i) \right\} = \frac{G}{c^2} \int dz \int d\varphi \lim_{r \rightarrow 0} (r \rho V_r \Psi_i), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$V_r = (\mathbf{V}_s \cdot \mathbf{e}_r), \quad V_\varphi = (\mathbf{V}_s \cdot \mathbf{e}_\varphi),$$

$$\mathbf{e}_r = \{\cos \varphi, \sin \varphi, 0\},$$

$$\mathbf{e}_\varphi = \{-\sin \varphi, \cos \varphi, 0\},$$

ось z направлена по лучу зрения на невозмущенный источник.

После несложных вычислений получаем

$$U^{(1)} = U_{\text{tot}}^* - \langle U_{\text{tot}} \rangle = -\frac{4\pi G}{c^2} \int_0^\infty dz \rho(0, z) \mathbf{V}_\perp, \quad (7)$$

где $\mathbf{V}_\perp$ — составляющая $\mathbf{V}_s(0, z)$, ортогональная к лучу зрения. Таким образом, выражение $U^{(1)}$ дает разность между эффектами ГДИ для непрерывного и дискретного распределения, определяемую плотностью массы на луче зрения. Отметим, что $U^{(1)}$ не стремится к нулю при «измельчении» масс микролинз и сохранении массовой плотности ρ .

ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ ЗВЕЗД ГАЛАКТИКИ

Для порядковых оценок принимаем четырехкомпонентную модель распределения материи в Галактике, полагая, что она состоит из балджа, толстого галактического диска, звездного гало и темной короны [6, 7]. В этой модели

сферические составляющие Галактики (балдж, гало и корона) имеют распределение плотности

$$\rho_s(R) = \frac{3M_s R_s^2}{4\pi(R_s^2 + R^2)^{5/2}},$$

где M_s — масса сферической составляющей, R_s — ее характерный размер, R — расстояние до центра. Однако мы выбрали увеличенные, по сравнению с [6], значения масс составляющих, чтобы выйти на оценку суммарной массы около $10^{12}M_\odot$ [4] и наблюдаемое значение скорости звезд в окрестности Солнца ($M_B = 1.5 \cdot 10^{11}M_\odot$, $R_B = 5$ кпк; $M_H = 5 \cdot 10^{10}M_\odot$, $R_H = 25$ кпк; $M_C = 8 \cdot 10^{11}M_\odot$, $R_C = 50$ кпк).

Для галактического диска принимаем следующее распределение:

$$\rho_D(r_\perp, z_p) = \frac{M_D r_D}{4\pi H (r_D^2 + r_\perp^2)^{3/2}}, \quad z_p < H,$$

$$\rho_D(r_\perp, z_p) = 0, \quad z_p > H;$$

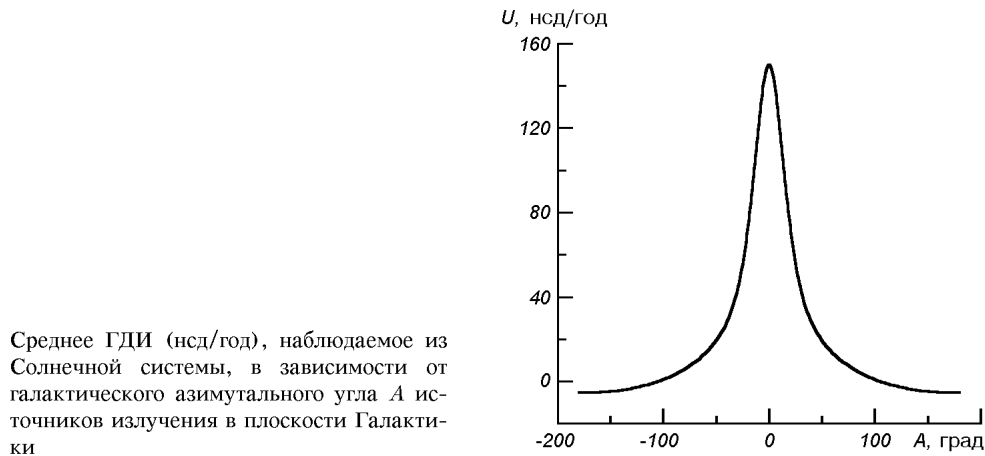
где z_p — расстояние до плоскости Галактики, $r_\perp$ — расстояние до ее оси вращения; $H = 0.6$ кпк (высота диска), $R_D = 15$ кпк и $M_D = 8 \cdot 10^{10}M_\odot$.

Эта модель используется совместно с согласованными с ней кривыми вращения, которые восстанавливаются по соответствующим потенциалам. Соответствующая зависимость скорости вращения от радиуса (для простоты мы ограничиваемся скоростями звезд в плоскости Галактики) имеет вид

$$V^2 = \frac{GM_B r_\perp^2}{(R_B^2 + r_\perp^2)^{3/2}} + \frac{GM_C r_\perp^2}{(R_C^2 + r_\perp^2)^{3/2}} + \frac{GM_H r_\perp^2}{(R_H^2 + r_\perp^2)^{3/2}} + \frac{GM_D}{2H} \left(\frac{2r_D}{\sqrt{r_\perp^2 + r_D^2}} - \frac{r_D + H}{\sqrt{r_\perp^2 + (r_D + H)^2}} - \frac{r_D - H}{\sqrt{r_\perp^2 + (r_D - H)^2}} \right).$$

Для наблюдателя в центре Галактики ГДИ легко определить, используя формулу (7); эта величина равна $3 \cdot 10^{-8}$ сд/год в случае источников в галактической плоскости. Расчет произведен в предположении, что масса в короне распределена непрерывно, остальные составляющие состоят из точечных масс. Эффект резко убывает с увеличением галактической широты источника; что связано с уменьшением количества звезд на луче зрения.

Оценки скорости ГДИ $\langle U_{\text{tot}} \rangle$ источников в плоскости Галактики для земного наблюдателя показаны на рисунке. Орбитальной скоростью Земли вокруг Солнца здесь пренебрегаем в сравнении со скоростью движения



вокруг галактического центра. Максимальное значение ГДИ — для источников в направлении галактического центра — составляет $1.5 \cdot 10^{-7}$ сд/год. Основной вклад в эффект дают диск и балдж.

ОБСУЖДЕНИЕ

Очевидно, что гравитационное движение изображений отличается в случае непрерывного и дискретного (случайного) распределения массы; в последнем случае ГДИ имеет характер случайных блужданий [9—12]. Здесь мы обращаем внимание, что отличие сохраняется также и после усреднения стохастического ГДИ при одинаковой средней плотности непрерывного и дискретного распределений. Например, в случае наблюдателя в центре Галактики поле гладкого осесимметричного распределения массы стационарно и не приводило бы к какому-либо движению изображений удаленных источников. В случае точечных микролинз такое движение имеет место, приводя к фиктивному вращению внегалактической системы отсчета в направлении вращения Галактики. Для наблюдателя в Солнечной системе значение средней скорости ГДИ в направлении центра Галактики достигает $1.5 \cdot 10^{-7}$ сд/год. Хотя эффект весьма мал, принципиально он наблюдаем, поскольку он резко уменьшается с увеличением угла наклона луча зрения к плоскости Галактики. Воображаемый алгоритм измерения выглядит следующим образом: рассматриваем (вращающуюся) систему отсчета, связанную с изображениями удаленных источников в плоскости Галактики; относительно этой системы определяем среднее ГДИ для большого числа источников под ненулевым углом к плоскости Галактики; при этом из рассмотрения исключаем изображения, подверженные событиям сильного микролинзирования по характерным признакам увеличения яркости и скорости за время порядка недель и месяцев.

Что касается практического наблюдения эффекта, необходимо отметить, что он пока находится за пределами точности наблюдений. Кроме того, для выделения систематического среднего ГДИ на фоне стохастических эффектов необходимо иметь достаточно большое число источников на разных галактических широтах. Отметим, что стохастические движения изображений квазаров [5, 9—12], которые трудно отличить от космологического собственного движения, более значительны, чем рассмотренное среднее ГДИ. Приведут ли эти эффекты к принципиальным ограничениям точности внегалактической системы отсчета (ср. [9])? По-видимому, нет. Во-первых, при усреднении по большому числу внегалактических источников можно исключить как вклад их собственных движений, так и случайно микролинзированные движения изображений. Фиктивное среднее вращение внегалактической системы отсчета, которое остается после такого усреднения, крайне мало, и соответствующий эффект неинерциальности вряд ли удастся экспериментально обнаружить в обозримом будущем. Но при достижении необходимой точности измерений все же потребуется периодически уточнять систему отсчета.

Работа поддержана Научно-технологическим центром в Украине (проект № 43).

1. Блюх П. В., Минаков А. А. Гравитационные линзы. — К.: Наук. думка, 1989.
2. Жданов В. И., Александров А. Н., Салата С. А. Движение изображений микролинзированных протяженных источников: аналитические соотношения и численные оценки при средних оптических плотностях // Кинематика и физика небес. тел.—2000.—1, № 6.—С. 336—345.
3. Жданов В. И., Салата С. А. Движение изображения удаленного объекта, микролинзиро-

- ванного звездами промежуточной галактики // Кинематика и физика небес. тел.—1998.—14, № 3.—С. 203—209.
4. Караченцев И. Д. Скрытая масса в Местной вселенной // Успехи физ. наук.—2001.—171.—С. 860—863.
 5. Кардашев Н. С. Космологическое собственное движение // Астрон. журн.—1986.—63.—С. 845—849.
 6. Минаков А. А., Шаляпин В. Н. Влияние поля тяготения Галактики на видимое положение, блеск и пространственную плотность далеких источников. I. Модель Галактики-линзы и угол гравитационного отклонения луча // Кинематика и физика небес. тел.—1990.—6, № 6.—С. 49—59.
 7. Минаков А. А., Шаляпин В. Н. Влияние поля тяготения Галактики на видимое положение, блеск и пространственную плотность далеких источников. II. Изменение блеска и пространственной плотности источников // Кинематика и физика небес. тел.—1990.—6, № 6.—С. 60—64.
 8. Пирагас К. А., Жданов В. И., Жданова В. В., Жук И. Т. Распространение света в слабом гравитационном поле стохастической системы точечных источников // Изв. вузов. Физика.—1986.—№ 12.—С. 79—83.
 9. Сажин М. В. Фундаментальный предел точности астрометрических измерений // Письма в Астрон. журн.—1996.—22.—С. 643—647.
 10. Sazhin M. V., Zharov V. E., Volynkin A. V., Kalinina T. A. Microarcsecond instability of the celestial reference frame // Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.—1998.—300.—P. 287—291.
 11. Zhdanov V. I. The general relativistic potential of astrometric studies at microarcsecond level // Astronomical and Astrophysical Objectives of Sub-Milliarcsecond Optical Astrometry / Eds E. Hog, P. K. Seidelmann. — Dordrecht: Kluwer, 1995.—P. 295—300.
 12. Zhdanov V. I., Zhdanova V. V. Analytical relations for time-dependent statistical microlensing // Astron. and Astrophys.—1995.—299, N 1.—P. 321—325.

Поступила в редакцию 15.07.04