

УДК 551.521.3+523.62

Л. С. Шакун

НИИ «Астрономическая обсерватория» Одесского национального университета
65014 Одесса, парк Т. Г. Шевченко

О решении обратной задачи сумеречного зондирования атмосферы

Рассматривается задача выявления слоя с повышенными рассеивающими свойствами по фотометрическим наблюдениям яркости неба в условиях сумерек. С помощью численного моделирования показано, что метод решения обратной задачи сумеречного зондирования, предложенный Н. Б. Дивари, приводит к размыванию слоев с повышенными рассеивающими свойствами, а метод, предложенный В. Н. Лебединцом, неустойчив относительно ошибок наблюдений и ошибок параметров модели. Мы предлагаем новый метод решения обратной задачи сумеречного зондирования, основанный на регуляризирующем алгоритме. Показана высокая устойчивость нашего метода к ошибкам наблюдения и существенно меньшее размытие слоев с повышенными рассеивающими свойствами.

ПРО РОЗВ'ЯЗОК ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ СУТІНКОВОГО ЗОНДУВАННЯ АТМОСФЕРИ, Шакун Л. С. — Розглядається задача виявлення шару з підвищеними розсіювальними властивостями за фотометричними спостереженнями яскравості неба в умовах сутінок. За допомогою числового моделювання показано, що метод розв'язування оберненої задачі сутінкового зондування, запропонований Н. Б. Діварі, приводить до розмивання шарів з підвищеними розсіювальними властивостями, а метод, запропонований В. Н. Лебединцем, нестійкий відносно помилок спостережень і помилок параметрів моделі. Ми пропонуємо новий метод розв'язання оберненої задачі сутінкового зондування, оснований на алгоритмі регуляризації. Показано високу стійкість нашого методу до помилок спостереження та істотно менше розмивання шарів з підвищеними розсіювальними властивостями.

ON THE SOLUTION OF THE INVERSE PROBLEM OF THE TWILIGHT SOUNDING OF THE ATMOSPHERE, by Shakun L. S. — The problem of revealing of a layer with increased scattering properties from photometric observations of sky brightness in conditions of twilight is considered. Solutions of the inverse problem of the twilight sounding which are suggested by N. B. Divari and V. N. Lebedinets are examined by the example of numerical modelling. It is shown that N. B. Divari's method results in spreading the layers with the increased scattering properties. The method suggested by

V. N. Lebedinets is instable both to mistakes of observations and to mistakes of model parameters. On the basis of the analysis of N. B. Divari and V. N. Lebedinets methods, we suggest a new method for solving the inverse problem of twilight sounding. From the properties of regularizing algorithm underlying our method, we showed high stability of our method to mistakes of observations and essentially smaller spreading of layers with the increased scattering properties.

Аэрозоль играет существенную роль в протекании химических и физических процессов в атмосфере Земли. Содержание аэрозоля испытывает временные вариации, поэтому мониторинг за содержанием аэрозоля позволяет существенно улучшить наше представление о физических и химических процессах в земной атмосфере. Рассеивающие свойства атмосферы зависят от содержания аэрозоля, поэтому они удобны для его количественной оценки.

В качестве параметров, определяющих рассеивающие свойства земной атмосферы, обычно используют объемный коэффициент рассеяния $\Sigma(h)$ и направленный коэффициент рассеяния $\sigma(\theta, h)$.

Объемный коэффициент рассеяния $\Sigma(h)$ определяет, какая часть солнечного излучения, падающего на элементарный объем, расположенный на высоте h над земной поверхностью, рассеивается во все стороны.

Направленный коэффициент рассеяния $\sigma(\theta, h)$ определяет, какая часть солнечного излучения, падающего на элементарный объем, расположенный на высоте h над земной поверхностью, рассеивается под углом θ от направления падающего света в единицу телесного угла.

Объемный и направленный коэффициенты рассеяния связаны зависимостью

$$\Sigma(h) = \int_{4\pi} \sigma(\theta, h) d\omega = 2\pi \int_0^{\pi} \sigma(\theta, h) d\theta.$$

Для определения рассеивающих свойств земной атмосферы можно воспользоваться методом сумеречного зондирования [2, 3]. В работах по методу сумеречного зондирования атмосферы Земли предлагается рассматривать наблюдаемую яркость сумеречного неба в виде трех составляющих:

$$B = B_1 + B_2 + B_3,$$

где B_1 — яркость первичных сумерек, B_2 — яркость вторичных сумерек, B_3 — яркость фона ночного неба.

Обратная задача сумеречного зондирования атмосферы состоит в определении объемного коэффициента рассеяния по яркости первичных сумерек. Очевидно, что до решения обратной задачи сумеречного зондирования атмосферы необходимо разделить наблюдаемую яркость сумеречного неба на яркость первичных и вторичных сумерек. Яркость фона неба находится непосредственно из наблюдений. Есть целый ряд методов решения этой задачи, но ни один не решает задачу точно. В настоящее время для этой цели мы используем разработанный нами метод [7]. В его основе лежит решение задачи о яркости сферической экспоненциальной атмосферы, предложенное О. И. Смоктием [6]. Далее будем полагать, что такое разделение можно выполнить с точностью до ошибок наблюдения. В соответствии с работами [2, 3] яркость первичных сумерек можно представить в виде

$$B_1(g, z) = E_0 p^m \int_{h_{sh}}^{h_{atm}} \Sigma(h) \psi(\theta, h) t(h, z, g) \sec y dh, \quad (1)$$

где $\psi(\theta, h)$ — индикатриса рассеяния на высоте h над земной поверхностью; θ — угол рассеяния; $t(h, z, g)$ — прозрачность атмосферы от Солнца до точки рассеяния на высоте h вдоль направления распространения солнечных лучей; γ — угол между направлением визирования и направлением на центр Земли из точки рассеяния; E_0 — освещенность на границе земной атмосферы; h_{sh} — высота земной тени; h_{atm} — высота атмосферы; p^m — прозрачность атмосферы вдоль пути от точки рассеяния до наблюдателя; z — зенитное расстояние направления визирования; g — погружение Солнца под горизонт. Для высоких слоев атмосферы h_{sh} высота земной тени достаточно велика и коэффициент прозрачности атмосферы практически не зависит от h .

Таким образом, определение зависимости объемного коэффициента рассеяния по яркости первичных сумерек сводится к решению интегрального уравнения (1). Н. Б. Дивари [2] предложил заменить интегральное уравнение алгебраическим

$$B_1(g, z) = E_0 p^m \Sigma(h') \psi(\theta, h') T(z, g) \Delta h \sec \gamma, \quad (2)$$

где h' — высота над земной поверхностью, соответствующая максимуму подынтегральной функции (1); Δh — полуширина подынтегральной функции; $T(z, g)$ — прозрачность атмосферы от Солнца до точки рассеяния на высоте h' .

Параметры h' , Δh и $T(z, g)$ определяются из априорно заданной модели атмосферы. В силу различий между априорной и реальной атмосферой эти параметры будут определены с некоторыми погрешностями. Поэтому полученное решение $\Sigma(h')$ будет зависеть от неточности априорных предположений и будет отличаться от реального значения объемного коэффициента рассеяния даже при отсутствии ошибок наблюдений.

Одной из типичных задач, которые решаются методом сумеречного зондирования, является задача выявления слоя с повышенными рассеивающими свойствами и оценки его параметров. В работах Н. Б. Дивари [2] и В. Н. Лебединца [3] при помощи разработанных там методов решается задача выявления и определения параметров слоя. В обеих работах ширина слоя, параметры которого можно оценить, определяется десятью и более километрами. Для проверки, насколько хорошо эти методы решают задачу определения параметров слоя, проведем численное моделирование.

Поскольку в работах [2, 3] не учитывалось поглощение за счет аэрозолей, то при данном сравнении не будем учитывать вклад аэрозолей в поглощение атмосферы. Специфика наблюдений и методов решения обратной задачи такова, что разные углы рассеяния в процессе решения обратной задачи можно рассматривать отдельно, поэтому выбор индикатрисы рассеяния для атмосферы не является критичным при исследовании методов решения обратной задачи. В соответствии с этим было выбрано две модели атмосферы: одну со слоем с повышенным объемным коэффициентом рассеяния, а другую — без такого слоя. Первую мы будем использовать для моделирования яркости первичных сумерек, вторую — для расчета коэффициентов, необходимых для решения обратной задачи сумеречного зондирования атмосферы Земли. Для моделирования мы выбрали сферически-симметричные непоглощающие атмосферы. Для упрощения задачи в обеих моделях использованы индикатрисы рассеяния, не зависящие от высоты и совпадающие с молекулярной индикатрисой Рэлея.

Концентрация вещества в каждой из атмосфер задана законом

$$n(h) = n_0 e^{-h/H} \left[1 + a e^{-\left(\frac{h-h_1}{d}\right)^2} \right],$$

Коэффициенты моделей атмосфер

Коэффициенты	Первая модель	Вторая модель
n_0	1 см^{-3}	1 см^{-3}
H	8 км	8 км
a	0	1
d	—	3 км
h_1	—	70 км
β	$1/16 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2$	$1/16 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2$

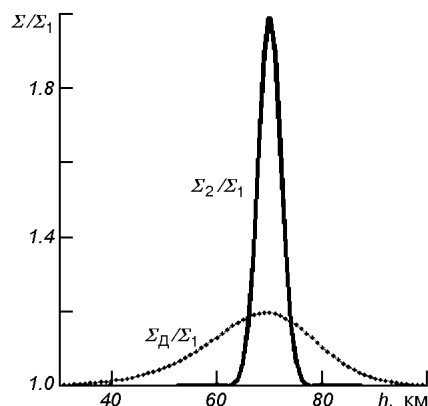


Рис. 1. Отношение объемных коэффициентов. Точками — отношение объемных коэффициентов, полученных методом Н. Б. Дивари, к объемным коэффициентам первой модели. Сплошная линия — отношение объемных коэффициентов второй модели к объемным коэффициентам первой модели

где n_0 — концентрация вещества у поверхности Земли; H — высота однородной атмосферы; a — коэффициент, определяющий плотность слоя; d — параметр, регулирующий ширину слоя; h_1 — высота слоя.

Закон изменения объемного коэффициента рассеяния задан следующим образом:

$$\Sigma(h) = \beta n(h),$$

где β — сечение рассеяния.

Сечение экстинкции совпадает с сечением рассеяния, так как в атмосферах отсутствует поглощение.

Тогда каждая из атмосфер определится набором коэффициентов, представленным в таблице.

Вторая атмосфера отличается от первой наличием мощного слоя на высоте 70 км и шириной слоя порядка 10 км. Сечение рассеяния β выбрано с таким расчетом, чтобы атмосфера была похожа на земную атмосферу в длине волны $\lambda = 370$ нм.

Используя вторую модель атмосферы, по формуле (1) мы рассчитали значения яркости первичных сумерек. Затем для первой модели атмосферы по формуле (2) была решена обратная задача сумеречного зондирования (рис. 1). Как видно применение метода [2] приводит к размыванию слоя. Такой результата обусловлен способом расчета коэффициентов $T(z, g)$ и высотной привязкой объемных коэффициентов h' . Таким образом, метод Н. Б. Дивари может выявить слой при небольших ошибках наблюдений, но ширина слоя будет существенно завышена, а плотность слоя занижена.

Рассмотрим другой метод решения интегрального уравнения (1). В работе [3] В. Н. Лебединец предложил заменить уравнение (1) системой уравнений

$$B_{1i}(\theta) = \sum_{j=1}^N A_{ij} \sigma_j(\theta), \quad (3)$$

где $\sigma_j(\theta)$ — направленный коэффициент рассеяния под углом θ , A_{ij} — коэффициенты, зависящие от освещенности наблюдаемых слоев и определяемые по априорной модели атмосферы. Индекс j нумерует интервалы высот от 0 до верхней границы атмосферы.

При выводе уравнения (3) предполагалось, что освещенность слоев в направлении визирования и направленный коэффициент рассеяния можно приближать кусочно-линейной ломаной. Поэтому интервал высот, для которых рассчитывается σ_j , составляет 3 км или меньше. В. Н. Лебединец предлагает решать уравнение (3) методом наименьших квадратов.

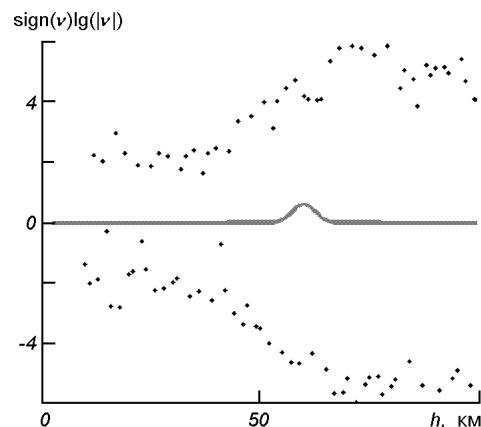
Применение метода наименьших квадратов к уравнению (3), где коэффициенты уравнения A_{ij} рассчитаны по первой модели, а яркость первичных сумерек B_{ij} рассчитана по формуле (1) и второй модели (таблица), привело к решению, в котором слои с положительным объемным коэффициентом чередуются со слоями с отрицательным объемным коэффициентом рассеяния (рис. 2). Абсолютное значение объемных коэффициентов рассеяния, полученных в результате решения обратной задачи, существенно больше объемных коэффициентов, заданных моделями 1 и 2. Поэтому, чтобы отобразить это решение на рисунке, нами была рассчитана функция

$$\text{sign}(v)\lg(|v|),$$

где $v = \Sigma_s/\Sigma_m$; Σ_s — объемный коэффициент, полученный в результате решения обратной задачи; Σ_m — объемный коэффициент для первой модели.

Из условия $v = \Sigma_s/\Sigma_m > 1$ следует, что величина функции $\text{sign}(v)\lg(|v|)$ будет принимать положительные значения для слоев с положительным объемным коэффициентом рассеяния и отрицательные — для слоев с отрицательным объемным коэффициентом рассеяния (рис. 2). Очевидно, что полученное решение совершенно не соответствует второй модели.

Рис. 2. Решение обратной задачи сумеречного зондирования атмосферы методом Лебединца. Линия — отношение объемных коэффициентов для двух моделей заданных в таблице. Точки — отношение объемного коэффициента, полученного при решении обратной задачи, к объемному коэффициенту априорной модели атмосферы



Уравнение (1) есть уравнение Фредгольма первого рода, и следовательно, обратная задача сумеречного зондирования относится к классу некорректных задач [4]. Следует ожидать, что применение метода наименьших квадратов к решению уравнения (3) приведет к неустойчивому решению.

Решение уравнения (3) методом наименьших квадратов дает

$$\sigma_j = C_{kj}^{-1} A_{ki}^* B_{1i}, \quad (4)$$

где $C_{kj} = A_{ki}^* A_{ij}$; A_{ki}^* — сопряженная матрица A_{ki} .

Найдем собственные значения матрицы C для случая первой атмосферы (таблица) и интервала высот 3 км (рис. 3). В монографии [1] для оценки

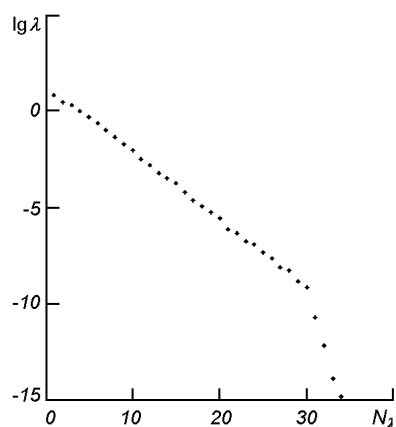


Рис. 3. Зависимость собственных значений матрицы С от их номера

ошибки решения уравнения (4) предлагается использовать неравенство

$$\delta\sigma \leq \frac{\varepsilon}{\lambda_{\min}}, \quad (5)$$

где $\delta\sigma$ — ошибка решения σ ; ε — ошибка измерений первичной яркости; λ_{\min} — минимальное собственное значение.

Вряд ли ошибка измерения яркости первичных сумерек ε может быть ниже 0.01 %. Тогда ошибка определения направленного коэффициента рассеяния σ по формуле (5) и рис. 3 составит 10^{10} . Очевидно, ошибка неприемлемо велика, и точное решение вряд ли может быть найдено.

Повысить устойчивость решения к ошибкам измерения можно, уменьшив количество неизвестных σ_j в уравнении (3). В работе [5] предлагается использовать большее расстояние между слоями. Оптимальным значением ширины слоя называют 8 км. Однако применение таких широких слоев понижает точность кусочно-линейной аппроксимации освещенности слоев, а это понижает точность расчета матрицы A_{ij} и опять не позволяет получить устойчивое решение.

Мы предлагаем следующий метод решения обратной задачи сумеречно-го зондирования земной атмосферы. При решении уравнения (3) определяют направленные коэффициенты от поверхности планеты, однако если оптическая плотность атмосферы достаточно высока, то освещенность нижних слоев атмосферы прямыми солнечными лучами в течение всех сумерек будет незначительной. Малое значение соответствующих этим высотам элементов матрица A_{ij} приведет к ошибкам σ_j , превышающим сами значения направленного коэффициента рассеяния. Поэтому для оптически плотной атмосферы имеет смысл ввести нижнюю границу атмосферы, ниже которой использовать модельные значения направленного коэффициента рассеяния, а не определять их в процессе решения. Аналогичная ситуация складывается и на верхней границе атмосферы. В уравнениях для определения направленных коэффициентов рассеяния на больших высотах существенный вклад вносят слои, лежащие выше верхней границы атмосферы. Однако их свойства не могут быть получены из решения уравнения (3), так как верхняя граница атмосферы определяется точностью разделения яркости первичных и вторичных сумерек. Поэтому недостающие члены в этих уравнениях необходимо заменять яркостью слоев выше границы атмосферы, исходя из априорной модели верхней атмосферы.

Кроме того, уравнения (3) неравнозначны по своему вкладу в ошибку направленных коэффициентов на разных высотах. В течение сумерек

яркость первичных сумерек изменяется на пять порядков. В тоже время ошибка определения яркости первичных сумерек примерно пропорциональна величине яркости первичных сумерек. Поэтому минимизация функционала $\Phi(\sigma) = \sum_{i=1}^N (B_{1i} - A_{ij}\sigma_j)^2$ приведет к существенно большей роли нижних слоев атмосферы, чем верхних.

Поэтому перепишем уравнение (3) в виде

$$B_{1i} = \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{ij}\alpha_j + B_{нi} + B_{вi}, \quad (6)$$

$$\tilde{A}_{ij} = A_{ij}\sigma_j,$$

где индекс j нумерует интервалы высот от нижней границы атмосферы h_{\min} до верхней границы атмосферы h_{\max} ; $B_{н}$ — яркость первичных сумерек, определяемая слоями лежащими ниже высоты h_{\min} , рассчитывается по априорной модели атмосферы; $B_{в}$ — яркость первичных сумерек, определяемая слоями, лежащими выше высоты h_{\max} , рассчитывается по априорной модели атмосферы; σ_j — априори заданный направленный коэффициент рассеяния.

Искомые множители α_j определяются выражением

$$\alpha_j\sigma_j = \tilde{\sigma}_j,$$

где $\tilde{\sigma}_j$ — искомые направленные коэффициенты рассеяния.

Учитывая, что ошибка яркости первичных сумерек пропорциональна яркости первичных сумерек, нормализуем каждое уравнение (6) так:

$$e_i = \sum_{j=1}^N \tilde{A}_{ij}\alpha_j,$$

где

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{\tilde{A}_{ij}}{B_{1i} - (B_{нi} + B_{вi})}.$$

Для поиска решения обратной задачи сумеречного зондирования воспользуемся методом регуляризации. Будем минимизировать функционал вида

$$\Phi(\alpha) + \eta\Psi(\alpha),$$

где η — регуляризирующий множитель, $\Phi(\alpha) = \|e - \tilde{A}\alpha\|^2$ — функционал наименьших квадратов, $\Psi(\alpha)$ — регуляризирующий функционал.

Вид регуляризирующего функционала выберем так, чтобы искомая модель атмосферы несильно отличалась от априорной модели

$$\Psi(\alpha) = \sum_{j=1}^N (\alpha_j - 1)^2.$$

Тогда уравнение для коэффициентов α_j будет иметь вид

$$\tilde{A}_{ki}^*\tilde{A}_{ij}\alpha_j + \eta\delta_{kj}(\alpha_j - e_j) = \tilde{A}_{ki}^*e_i,$$

где \tilde{A}_{ki}^* — сопряженная матрица \tilde{A}_{ij} ; δ_{kj} — единичная матрица; e_j — вектор, каждая составляющая которого равна 1.

Следовательно,

$$\alpha_j = (\tilde{A}_{ki}^*\tilde{A}_{ij} + \eta\delta_{kj})^{-1}(\tilde{A}_{ki}^*e_i - \eta\delta_{kj}e_j). \quad (7)$$

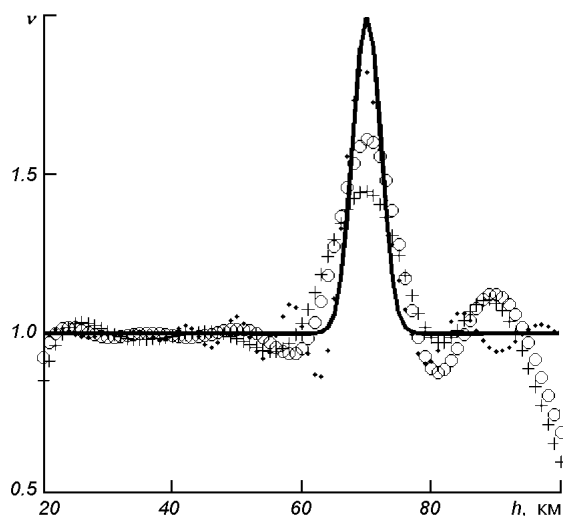


Рис. 4. Зависимость точности восстановления слоя от величины регуляризирующего множителя. Точки — решение при $\eta = 10^{-5}$, кружки — $\eta = 10^{-3}$, крестики — $\eta = 10^{-2}$

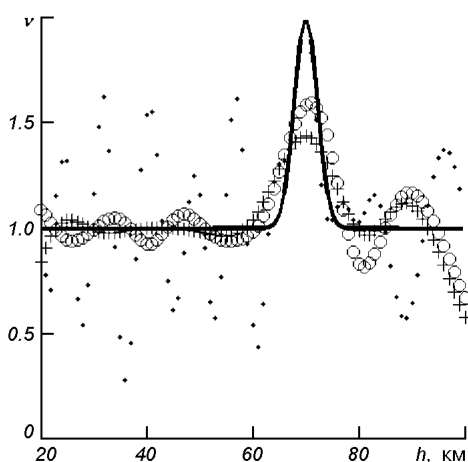


Рис. 5. Зависимость точности восстановления слоя при наличии 2 % шума в измерениях первичной яркости сумерек. Точки — решение при $\eta = 10^{-5}$, кружки — $\eta = 10^{-3}$, крестики — $\eta = 10^{-2}$

Очевидно, что все собственные значения матрицы $(\tilde{A}_{ki}^* \tilde{A}_{ij} + \eta \delta_{kj})$ больше или равны регуляризирующего множителя η . Используя оценку (5), имеем

$$\delta \sigma_j \leq \frac{\varepsilon}{\eta} \sigma_j.$$

Рассмотрим, как предложенный нами метод может выделить рассеивающий слой. Для этого опять воспользуемся моделями, определенными в таблице. Рассчитаем яркость первичных сумерек V_i по второй модели, а коэффициенты \tilde{A}_{ij} — по первой модели. Нижнюю границу атмосферы выберем на уровне 20 км, а верхнюю — 100 км. Ширину интервала между слоями выберем 1 км. Видно (рис. 4), что при регуляризирующем множителе порядка 10^{-5} точность восстановления слоя достаточно хороша, а неустойчивость задачи еще не сильно проявляется.

Рассмотрим теперь точно такое же моделирование только яркость первичных сумерек подвергнем зашумлению в 2 % (рис. 5). Видно, что при регуляризирующем множителе порядка 10^{-5} решение обратной задачи сумеречного зондирования становится неустойчивым. Увеличение значения регуляризирующего множителя до 10^{-3} возвращает устойчивость решению,

однако приводит к некоторому размытию слоя. Из выражения (7) следует, что при известной ошибке определения яркости первичных сумерек можно подобрать значение регуляризирующего множителя, которое будет позволять получать устойчивое решение.

Таким образом, нами разработан метод решения обратной задачи сумеречного зондирования атмосферы, позволяющий по наблюдаемой яркости первичных сумерек выделить слои с характерными размерами 10 км и более.

1. Бахвалов И. В., Жидков Н. П., Кобельников Г. М. Численные методы. — М.: Физматлит, 2000.—622 с.
2. Дивари Н. Б. Методы и результаты определения рассеивающих свойств атмосферы в условиях сумерек // Пыль в атмосфере и околоземном космическом пространстве. — М.: Наука, 1973.—С. 75—91.
3. Кальсин А. В., Кауфман Ю. Г., Лебединец В. Н. и др. Сумеречные исследования верхней атмосферы в районе восточного Памира // Тр. ИЭМ.—1976.—Вып. 4(61).—С. 85—102.
4. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы. — М.: Наука, 1977.—Т. 2.—400 с..
5. Лебединец В. Н., Троянова Н. М. О решении обратной задачи сумеречного зондирования аэрозольных слоев в верхней атмосфере // Тр. ИЭМ.—1981.—Вып. 12(96).—С. 57—64.
6. Смоктий О. И. Многократное рассеяние света в неоднородной сферически-симметричной планетной атмосфере // Физика атмосферы и океана.—1967.—3, № 5.—С. 496—506.
7. Shakun L. S. Secondary twilight in the twilight sounding problem // IRS 2000: Current problems in atmospheric radiation. — 2001.—P. 429—432.

Поступила в редакцию 07.10.03