ISSN 0233-7665. Кинематика и физика небес. тел. 1993. Т. 9. № 3

УДК 523.98

В. П. Кучеренко, А. К. Юхимук

Нелинейное взаимодействие кинетических альвеновских волн

Рассматривается нелинейное взаимодействие кинетических альвеновских волн. В результате развития неустойчивости кинетическая альвеновская волна накачки распадается на две другие кинетические альвеновские волны с меньшими частотами. Такие эффекты могут представлять интерес для понимания динамики частиц высокой энергии в солнечных магнитных петлях.

НЕЛІНІЙНА ВЗАЄМОДІЯ КІНЕТИЧНИХ АЛЬВЕНІВСЬКИХ ХВИЛЬ, Кучеренко В. П, Юхимук А. К. — Розглядається нелінійна взаємодія кінетичних альвенівських хвиль. В результаті розвитку нестійкості кінетична альвенівська хвиля накачки розпадається на дві КАВ з меншими частотами. Такі ефекти можуть представляти інтерес для розуміння динаміки частинок високої енергії в сонячних магнітних петлях.

NONLINEAR INTERACTION OF KINETIC ALFVÉN WAVES, by Kucherenko V. P., Yukhimuk A. K. — Nonlinear interaction of kinetic Alfvén waves (KAW) is studied. Pump KAW decays into two KAWs with lower frequencies as a result of instability development. These effects can be important to understand energetic particles dynamics in solar magnetic loops.

Введение. Многие нелинейные явления в плазме можно описать, если воспользоваться представлением об усредненных пондеромоторных силах. К таким процессам относится и распад волн. Как известно [3], в силу особенностей поляризации альвеновских волн с линейным законом дисперсии $\omega = k_z v_A$ распад волн невозможен, поскольку матричный элемент трехволнового взаимодействия равен нулю. В приближении идеальной МГД нет поперечной дисперсии альвеновских волн: их частота не зависит от $k_\perp$, и энергия волны переносится строго вдоль силовых линий магнитного поля. Учесть поперечную дисперсию альвеновских волн позволяет двухжидкостная магнитная гидродинамика. Так, с учетом тепловых эффектов дисперсионное соотношение для альвеновских волн имеет вид:

$$\omega^2 = k_z^2 v_A^2 (1 + k_\perp^2 \rho_s^2), \tag{1}$$

где

$$\rho_s = v_s/\omega_{Bi}, \quad v_s = (T_e/m_i)^{1/2}, \qquad \omega_{Bi} = eB_0/m_i \,.$$

В области очень малых значений поперечных волновых векторов $k_\perp < (\omega/\omega_{Bi})^{1/2} k_z$ также существует слабая поперечная дисперсия альвеновских волн, обусловленная инерцией ионов («холодная» дисперсия). Исследованию влияния холодной дисперсии на распространение альвеновских волн в неоднородной плазме посвящена работа [6], в которой показано, что учет такой дисперсии создает условия для волноводного распространения альвеновских волн вдоль магнитного поля.

Настоящая работа посвящена исследованию нелинейного взаимодействия поперечно-мелкомасштабных альвеновских волн ($k_\perp >> k_z$). В этом случае будет доминировать поперечная дисперсия, обусловленная конечностью ларморовского радиуса ионов. Впервые распадная неустойчивость альвеновских волн с учетом тепловых эффектов была рассмотрена в работе [3]. Однако, как нам представляется, этот вопрос исследован недостаточно полно.

Предполагается, что в замагниченной плазме с малым плазменном параметром β распространяется кинетическая альвеновская волна (КАВ)

$$E_0 = \mathcal{E}_0 \exp i\psi + \text{к.с.}, \tag{2}$$

где

$$\psi = -\omega_0 t + \mathbf{k}_0\mathbf{r}, \qquad \omega_0^2 = k_{0z}^2 v_A^2 (1 + k_{0\perp}^2 \rho_s^2),$$

которая распадается на две КАВ с частотами ω_1, ω_2 и волновыми векторами $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$. При этом должны выполняться условия сохранения энергии и импульса

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \qquad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \tag{3}$$

Основные уравнения. Для описания нелинейных процессов, связанных с взаимодействием КАВ, воспользуемся уравнениями двухжидкостной магнитной гидродинамики:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial t} = \frac{1}{m_j}(e_j\mathbf{E} + \mathbf{F}_{pj}) + \frac{e_j}{m_j}(\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}_0) - \frac{T_j}{m_j n_j}\nabla n_j,$$

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla(n_j \mathbf{v}_j) = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0\left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right),$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1}\rho_e. \tag{4}$$

Здесь

$$\mathbf{F}_{pj} = e_j(\mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - m_j(\mathbf{v}_j \cdot \nabla)\mathbf{v}_j,$$

$$\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e),$$

$$\rho_e = e(n_i - n_e).$$

Поскольку $F_{pi} = \frac{m_e}{m_i} F_{pe} << F_{pe}$, то влиянием пондеромоторной силы на ионную компоненту будем пренебрегать. Кроме того, учитывая, что $v_A << c$, будем пренебрегать в уравнении Ампера — Максвелла током смещения.

Дисперсионное уравнение для кинетических альвеновских волн. В случае плазмы с малым плазменным параметром $\beta << 1$ можно воспользоваться двухпотенциальным приближением [4]:

$$\mathbf{E}_\perp = -\nabla\varphi, \qquad E_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z}, \tag{5}$$

где $\varphi \neq \psi$.

Поскольку альвеновские волны являются медленными, при получении дисперсионного уравнения можно воспользоваться плазменным приближением:

$$n_e' = n_i', \tag{6}$$

(n_e' и n_i' — возмущенная плотность электронов и ионов).

Так как фазовая скорость альвеновской волны значительно меньше тепловой скорости электронов, инерцией электронов будем пренебрегать, а их температуру считать постоянной (T_e = const). В этом случае из z-составляющей уравнения движения для электронов получим

$$n_e' = \frac{en_0}{T_e}\left(\psi - i\frac{\langle F_z\rangle}{ek_z}\right), \tag{7}$$

где $\langle F_z\rangle$ — z-составляющая пондеромоторной силы, определяемая выражением

$$\langle F_z\rangle = -e\langle(\mathbf{v}_e \times \mathbf{B})_z\rangle - m_e\langle(\mathbf{v}_e\cdot\nabla)\mathrm{v}_{ez}\rangle. \tag{8}$$

Выражение для n_i' получим из уравнений движения и непрерывности для ионной компоненты:

$$\frac{\partial\mathbf{v}_i}{\partial t} = \frac{e\mathbf{E}}{m_i} + \mathbf{v}_i \times \boldsymbol{\omega}_{Bi}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + n_0\nabla\cdot\mathbf{v}_i = 0. \tag{10}$$

Из уравнения (9) находим

$$\mathrm{v}_{xi} = -\frac{e}{m_i}\frac{\omega}{\omega_{Bi}^2}k_x\varphi - i\frac{e}{m_i}\frac{k_y}{\omega_{Bi}}\varphi,$$

$$\mathrm{v}_{yi} = -\frac{e}{m_i}\frac{\omega}{\omega_{Bi}^2}k_y\varphi + i\frac{e}{m_i}\frac{k_x}{\omega_{Bi}}\varphi,$$

$$\mathrm{v}_{zi} = \frac{e}{m_i}\frac{k_z}{\omega}\psi. \tag{11}$$

Подставляя (11) в уравнение непрерывности (10), получим

$$n_i' = -\frac{en_0}{m_i}\left(\frac{k_\perp^2}{\omega_{Bi}^2}\varphi - \frac{k_z^2}{\omega^2}\psi\right). \tag{12}$$

Приравнивая выражения (7) и (12), имеем

$$\psi + k_\perp^2\rho_s^2\varphi + \frac{k_z^2\mathrm{v}_s^2}{\omega^2}\psi = i\frac{\langle F_z\rangle}{ek_z}. \tag{13}$$

Для нахождения связи между φ и ψ воспользуемся уравнением Ампера:

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{j} \tag{14}$$

и уравнением сохранения заряда:

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0. \tag{15}$$

Из уравнения (14), после Фурье-преобразования, получим

$$j_z = \frac{k_z k_\perp^2}{\mu_0 \omega} (\varphi - \psi). \tag{16}$$

Из уравнения (15) с учетом условия (6) следует

$$j_z = \varepsilon_0 \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{Bi}}\right)^2 \frac{\omega}{k_z} k_\perp^2 \varphi. \tag{17}$$

Приравнивая (16) и (17), находим связь между потенциалами φ и ψ:

$$\psi = \left(1 - \frac{\omega^2}{k_z^2 v_A^2}\right) \varphi. \tag{18}$$

Подставляя (18) в (13), получим нелинейные дисперсионные уравнения для КАВ, образовавшихся вследствие распада волны накачки:

$$\left[\left(\frac{\omega_1}{k_{z1} v_A}\right)^2 - (1 + k_{\perp 1}^2 \rho_s^2)\right] \varphi_1 = - i \frac{\langle F_z^2 \rangle}{e k_{z1}}, \tag{19}$$

$$\left[\left(\frac{\omega_2}{k_{z2} v_A}\right)^2 - (1 + k_{\perp 2}^2 \rho_s^2)\right] \varphi_2 = - i \frac{\langle F_z^1 \rangle}{e k_{z2}}, \tag{20}$$

где $\langle F_z^2 \rangle$ — составляющая пондеромоторной силы, определяемая взаимодействием волны накачки и второй волны, образовавшейся в результате распада, а составляющая силы $\langle F_z^1 \rangle$ будет определяться соответственно взаимодействием волны накачки и первой волны.

Вычислим z-составляющую пондеромоторной силы:

$$\langle F_z \rangle = - e (v_e^0 \times B^*)_z - e (v_e^* \times B^0)_z - m_e (v_e^0 \nabla) v_{ez}^* - m_e (v_e^* \nabla) v_{ez}^0 . \tag{21}$$

Из уравнения движения электронов находим выражения для составляющих скорости:

$$v_{xe} = - i \frac{e}{m_e \omega_{Be}} k_y \varphi,$$

$$v_{ye} = i \frac{e}{m_e \omega_{Be}} k_x \varphi, \tag{22}$$

$$v_{ze} = - \frac{e}{T_e} \frac{\omega}{k_z} k_\perp^2 \rho_s^2 \varphi.$$

Выражения для магнитного поля можно найти из уравнения Максвелла:

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega},$$

откуда, используя соотношения (5) и (18), получим

$$B_x = i \frac{k_y k_z}{\omega} (1 + k_\perp^2 \rho_s^2) \varphi,$$

$$B_y = - i \frac{k_x k_z}{\omega} (1 + k_\perp^2 \rho_s^2) \varphi. \tag{23}$$

Подставляя (22) и (23) в (21), находим

$$\langle F_z\rangle = \frac{e}{m_e\omega_{Be}}\left\{\left[\frac{k_z}{\omega}(1+\mu_s) - \frac{k_{0z}}{\omega_0}(1+\mu_{s0})\right] + \frac{1}{v_{Te}^2}\left[\frac{\omega}{k_z}\mu_s - \frac{\omega_0}{k_{0z}}\mu_{s0}\right]\right\}(\mathbf{k}_0\times\mathbf{k})_z\varphi_0\varphi^* +$$

$$+ i\frac{e^2}{v_{Te}^2T_e}\frac{\omega}{k_z}\frac{\omega_0}{k_{0z}}(k_z - k_{0z})\mu_s\mu_{s0}\varphi_0\varphi^* \,. \tag{24}$$

Здесь

$$\mu_s = (k_\perp\rho_s)^2, \qquad \mu_{s0} = (k_{\perp 0}\,\rho_s)^2,$$

$$v_{Te} = (T_e/m_e)^{1/2}$$

— тепловая скорость электронов.

Полагая в уравнении (24) $\omega/k_z \approx \omega_0/k_{z0} \approx v_A$ и учитывая, что второй член, порядка $(v_A/v_{Te})^2\,\mu_s/\mu_{s0}$, значительно меньше первого, получим выражения для $\langle F_z^1\rangle$ и $\langle F_z^2\rangle$:

$$\langle F_z^2\rangle = \frac{e^2}{2m_e\,\omega_{Be}\,v_A}(\mu_{s2} - \mu_{s0})\,(\mathbf{k}_0\times\mathbf{k}_2)_z\,\varphi_0\varphi_2^*, \tag{25}$$

$$\langle F_z^1\rangle = -\frac{e^2}{2m_e\,\omega_{Be}\,v_A}(\mu_{s1} - \mu_{s0})\,(\mathbf{k}_0\times\mathbf{k}_2)_z\,\varphi_0\varphi_1^*. \tag{26}$$

В выражении (26) учтено, что $\mathbf{k}_0\times\mathbf{k}_1 = -\,\mathbf{k}_0\times\mathbf{k}_2$.

Подставляя (25) и (26) в уравнения (19) и (20), получим

$$\varepsilon_1\varphi_1 = \mu_1\varphi_0\varphi_2^*, \tag{27}$$

$$\varepsilon_2\varphi_2 = \mu_2\varphi_0\varphi_1^*, \tag{28}$$

где коэффициенты связи μ_1 и μ_2 определяются выражениями:

$$\mu_1 = -\,i\frac{e}{2m_e\,\omega_{Be}\,v_A}\frac{\mu_{s2}-\mu_{s0}}{k_{z1}}(\mathbf{k}_0\times\mathbf{k}_2)_z\,,$$

$$\mu_2 = i\frac{e}{2m_e\,\omega_{Be}\,v_A}\frac{\mu_{s1}-\mu_{s0}}{k_{z2}}(\mathbf{k}_0\times\mathbf{k}_2)_z\,.$$

При отсутствии волны накачки ($\varphi_0 = 0$) уравнения (27) и (28) описывают линейные законы дисперсии для КАВ:

$$\varepsilon_1 = \left(\frac{\omega_1}{k_{z1}v_A}\right)^2 - (1+\mu_{s1}) = 0, \tag{29}$$

$$\varepsilon_2 = \left(\frac{\omega_2}{k_{z2}v_A}\right)^2 - (1+\mu_{s2}) = 0. \tag{30}$$

Нелинейное дисперсионное уравнение. Из уравнений (27) и (28) находим нелинейное дисперсионное уравнение для связанных пондеромоторной силой волн

$$\varepsilon_1\varepsilon_2 = \mu_1\,\mu_2^*\,|\varphi_0|^2. \tag{31}$$

Полагая

$$\omega_1 = \omega_{1r} + i\gamma\,, \qquad \omega_2 = \omega_{2r} + i\gamma \qquad (\gamma \ll \omega_{1r}, \omega_{2r}),$$

из уравнения (31) получим выражение для нелинейного инкремента нарастания волн при отсутствии затухания (ω_{1r} и ω_{2r} определяются уравнениями (29) и (30)):

$$\gamma^2 = -\frac{\mu_1 \mu_2^* |\varphi_0|^2}{\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega_{1r}} \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \omega_{2r}}}, \tag{32}$$

где

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega_{1r}} = \frac{2\omega_{1r}}{k_{z1}^2 \mathrm{v}_A^2} \approx \frac{2}{k_{z1}\mathrm{v}_A},$$
$$\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial \omega_{2r}} = \frac{2\omega_{2r}}{k_{z2}^2 \mathrm{v}_A^2} \approx \frac{2}{k_{z2}\mathrm{v}_A}. \tag{33}$$

Подставляя (33) в (32), находим

$$\gamma = \frac{e}{4m_e \omega_{Be}} (\delta_1 \delta_2)^{1/2} |(\mathbf{k}_0 \times \mathbf{k}_2)_z| \varphi_0 . \tag{34}$$

Здесь

$$\delta_i = \mu_{si} - \mu_{s0}, \qquad i = 1, 2.$$

Заключение. Таким образом, проведенные исследования показывают, что кинетические альвеновские волны могут распадаться на другие кинетические альвеновские волны с меньшими частотами. Источником альвеновских волн могут быть протоны высоких энергий. Как показано в работах [1, 2], сверхальвеновские потоки протонов могут возбуждать КАВ в солнечных магнитных петлях.

Наиболее вероятно, что такие процессы будут протекать в горячих послевспышечных петлях. Как известно [7, 8], температура и концентрация в таких петлях могут достигать $T \approx 10^7 \div 10^8$ К и $n \approx 10^{16}$ м$^{-3}$ соответственно. Для типичных значений магнитных полей в петлях $B \approx 10^{-3} \div 10^{-2}$ Тл альвеновская скорость значительно меньше тепловой скорости электронов. Рассмотренное нелинейное взаимодействие КАВ может представлять интерес для понимания динамики частиц высокой энергии в магнитных петлях, так как известно, что релаксация протонного пучка при его взаимодействии с альвеновскими волнами происходит значительно быстрее, чем за счет кулоновских соударений [3]. Однако этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

1. *Войтенко Ю. М.* Сверхальвеновские пучки КАВ в космичекой плазме. — Киев, 1989.—24 с.—(Препр. / АН УССР. Ин-т теорет. физики; ИТФ-89-9Р).
2. *Войтенко Ю. М., Кришталь А. Н., Маловичко П. П., Юхимук А. К.* Генерация КАВ и их роль в нагреве корональных петель // Кинематика и физика небес. тел.—1990.—6, № 2.—С. 61—65
3. *Ерохин Н. С., Моисеев С. С., Мухин В. В.* Распадная неустойчивость альвеновских волн в горячей плазме // Физика плазмы.—1978.—4, № 5.—С. 1172—1174.
4. *Кадомцев Б. Б.* Турбулентность плазмы // Вопросы теории плазмы. — М.: Атомиздат, 1964.—Вып. 4.—С. 188—339.
5. *Кулыгин В. М., Михайловский А. Б., Пятак А. И.* Квазилинейная релаксация пучка быстрых протонов в токамаке // Журн. экспер. и теорет. физики.—1976.—70, № 6.—С. 2152—2160.
6. *Леонович А. С. , Мазур В. А., Сенаторов В. Н.* Альвеновский волновод // Журн. экспер. и теорет. физики.—1983.—85, вып. 1(7).—С. 141—145.
7. *Прист Э. Р.* Солнечная магнитогидродинамика. — М.: Мир, 1985.—589 с.
8. *Сомов Б. В.* Солнечные вспышки // Итоги науки и техники / Астрономия. — М.: ВИНИТИ, 1987.—Т. 94.—С. 78—135.

Главная астрономическая обсерватория
Академии наук Украины, Киев

Поступила в редакцию
27.07.92