4. *Bahram Mashhon.* Scattering of electromagnetic radiation from a black hole. — Phys. Rev., 1973, **D7**, 2807.
5. *Dwivedi I., Kantowski R.* On the possibility of observing first-order corrections to geometrical optics in a curved space-time. — J. Math. Phys., 1972, **13**, 1941.
6. *Mo Tse Chin, Papas C. H.* Electromagnetic field and wave propagation in gravitation. — Phys. Rev., 1971, **D3**, 1708.
7. *Plebanski J.* Electromagnetic waves in gravitational fields. — Phys. Rev., 1960, **118**, 1396.

Киевский государственный
университет

Поступила в редколлегию
в июне 1975 г.

A. V. MANDZHOS, S. V. KHMIL'

ON PROPAGATION OF QUASI-MONOCHROMATIC RADIATION IN GRAVITATIONAL FIELDS

Summary

The problem of quasi-monochromatic electromagnetic radiation in a static gravitational field is considered in a short wavelength approximation. This problem is shown to be reduced to a case of monochromatic waves. The fact of conservation of the coherence matrix along the light ray in the geometrical optics approximation is extented to quasi-monochromatic radiation.

УДК 538.566

С. В. Хмиль

О КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОМ ИЗЛУЧЕНИИ В СТАЦИОНАРНОМ ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Уравнения, описывающие электромагнитные явления в искривленном пространстве-времени, очень сложны, и их точное решение удается получить лишь в исключительных случаях. Поэтому для упрощения задачи обычно прибегают к приближению геометрической оптики, которое, однако, является весьма грубым. Более полное описание распространения электромагнитных волн в поле тяготения достигается использованием приближения коротких волн, когда величины, характеризующие электромагнитное поле, представляются в виде асимптотических разложений по степеням длины волны (первый член такого разложения, формально соответствующий нулевой длине волны, описывает поле в приближении геометрической оптики).

С точки зрения наблюдений особый интерес представляет изучение распространения квазимонохроматической радиации. В [2] показано, что в коротковолновом приближении задачи о квазимонохроматическом излучении в гравитационном поле с метрикой вида

$$ds^2 = f_1(x, y, z)\,dt^2 - f_2(x, y, z)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

сводится к задаче о монохроматическом излучении. В настоящей статье этот результат с некоторыми уточнениями обобщается на случай произвольной стационарной метрики.

КОРОТКОВОЛНОВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Прежде всего составим общековариантные уравнения, которым удовлетворяет электромагнитное поле в приближении коротких волн. В отличие от [4], где аналогичные уравнения получены в комплексной квазиортонормированной тетраде, мы будем пользоваться обычной формулировкой уравнений электродинамики.

Пусть пространство-время характеризуется метрическим тензором $g_{ab}(x^i)$ с сигнатурой —2. Условимся, что латинские индексы принимают значения 0, 1, 2, 3, греческие — 1, 2, 3; индекс 0 соответствует временной координате.

Уравнения Максвелла в вакууме без зарядов

$$F^{ab}_{\ ;b}=0;\quad F_{ab;c}+F_{bc;a}+F_{ca;b}=0 \tag{1}$$

можно представить в виде [3]

$$\Box F_{ab}+R_{abik}F^{ik}=0, \tag{2}$$

где F_{ab} — антисимметричный тензор электромагнитного поля, R_{abcd} — тензор кривизны, $\Box F_{ab}\equiv g^{ik}F_{ab;ik}$, точка с запятой обозначает ковариантное дифференцирование. Отметим, во избежание недоразумений, что определение оператора $\Box$ в [3] знаком отличается от принятого здесь определения.

Будем искать решение уравнений (2) в виде ряда

$$F_{ab}(x^i)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(i\varepsilon)^{\nu}F_{(\nu)ab}(x^i)\exp\left[\frac{i}{\varepsilon}S(x^i)\right]. \tag{3}$$

Здесь $S(x^i)$ — эйконал, $F_{(\nu)ab}(x^i)$ — антисимметричные тензоры, которые считаются комплексными, чтобы учесть все состояния поляризации, ε — положительный малый параметр, смысл которого указан ниже.

Считая, что ряд (3) можно почленно дифференцировать, подставим его в (2); после несложных преобразований получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left\{(i\varepsilon)^{\nu}\left[\Box F_{(\nu)ab}+R_{abik}F^{ik}_{(\nu)}\right]+2(i\varepsilon)^{\nu-1}\left[F_{(\nu)ab;c}k^c+\theta F_{(\nu)ab}\right]+\right.$$

$$\left.+(i\varepsilon)^{\nu-2}(k_ck^c)F_{(\nu)ab}\right\}e^{iS/\varepsilon}=0, \tag{4}$$

где приняты обозначения:

$$k_a=-\frac{\partial S}{\partial x^a}; \tag{5}$$

$$\theta=\frac{1}{2}k^a_{\ ;a}. \tag{6}$$

Если коэффициенты при степенях $(i\varepsilon)$ приравнять нулю, получится следующая система уравнений относительно $S(x^i)$ и $F_{(\nu)ab}(x^i)$:

$$k_ak^a=g^{ab}\frac{\partial S}{\partial x^a}\frac{\partial S}{\partial x^b}=0; \tag{7а}$$

$$F_{(0)ab;c}k^c+\theta F_{(0)ab}=0; \tag{7б}$$

$$F_{(\nu+1)ab;c}k^c+\theta F_{(\nu+1)ab}=-\frac{1}{2}\left(\Box F_{(\nu)ab}+R_{abik}F^{ik}_{(\nu)}\right), \tag{7в}$$

$$\nu=0,\ 1,\ 2,\ldots$$

Уравнение эйконала (7а) показывает, что гиперповерхности постоянной фазы (четырехмерные волновые фронты) $S(x^i)=\text{const}$ являются изотропными гиперповерхностями. Ортогональные им изотропные траектории представляют собой световые лучи. 4-вектор k^a в каждой точке направлен по касательной к световому лучу. С помощью (5) и (7а) нетрудно убедиться в том, что

$$k^a_{;b}k^b=0, \tag{8}$$

т. е. световые лучи образуют геодезическую конгруэнцию. Величина θ, определенная согласно (6), является параметром расширения этой конгруэнции (см. [5]).

Уравнение (7б) описывает электромагнитное поле в приближении геометрической оптики, а уравнение (7в) дает поправки $(\nu+1)$-го порядка относительно ε к этому приближению ($\nu=0, 1, \dots$).

Выясним физический смысл параметра ε. В каждой пространственно-временной точке волновой 4-вектор равен $\frac{1}{\varepsilon}\,k^a$. Следовательно, частота, измеренная наблюдателем с 4-скоростью u^a, равна:

$$\omega=\frac{c}{\varepsilon}k_a u^a. \tag{9}$$

Соответствующая ей длина волны определяется формулой

$$\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}=\frac{2\pi\varepsilon}{(k_a u^a)}. \tag{10}$$

Если считать, что $k_a u^a \sim 1$, то $\lambda\sim\varepsilon$. Таким образом, по порядку величины параметр ε совпадает с характерной для электромагнитного поля (3) длиной волны.

Сделаем несколько замечаний об условиях применимости разложения (3).

Очевидно, что параметр ε должен удовлетворять неравенству $\varepsilon\ll l_g$, где l_g — характерная для данного гравитационного поля длина (например, для поля Шварцшильда ее можно принять равной гравитационному радиусу). Во всех случаях, представляющих интерес с точки зрения наблюдений, это условие хорошо выполняется не только для оптического, но и для радиоизлучения. Кроме того, определенные ограничения должны быть наложены на «амплитуды» $\underset{(\nu)}{F_{ab}}$ и их первые и вторые производные, что необходимо для обоснования почленного дифференцирования ряда (3) при выводе системы уравнений (7). Наконец, отметим, что вблизи особенностей конгруэнции световых лучей (8), таких, как фокусы или каустические поверхности, разложение (3), вообще говоря, неприменимо (ср. аналогичное замечание в книге Борна и Вольфа [1]).

КВАЗИМОНОХРОМАТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В СТАЦИОНАРНОМ ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ

До сих пор мы не делали никаких предположений относительно характера метрики пространства-времени, и поэтому полученные выше уравнения, в принципе, пригодны для описания распространения электромагнитных волн в произвольном поле тяготения.

Рассмотрим теперь подробнее частный случай, когда метрика стационарна, т. е. выполнено условие

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^0}=0. \tag{11}$$

Пусть в этом поле распространяется квазимонохроматическое электромагнитное излучение. По определению (например, [1]), эффективная ширина спектра такого излучения мала по сравнению со средней частотой. Математически это означает, что для тензора электромагнитного поля F_{ab} справедливо представление

$$F_{ab}(x^0, x^\alpha) = f_{ab}(x^0, x^\alpha)\, e^{-\frac{i\bar{\omega}x^0}{c}}, \tag{12}$$

где $\bar{\omega}$ — средняя частота, а

$$f_{ab}(x^0, x^\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}_{ab}(\omega, x^\alpha)\, e^{-\frac{i\omega x^0}{c}} d\omega, \tag{13}$$

причем спектральные амплитуды $\hat{f}_{ab}(\omega, x^\alpha)$ имеют заметную величину лишь при тех значениях ω, которые удовлетворяют неравенству

$$|\omega| \leqslant \Delta\omega \ll \bar{\omega}. \tag{14}$$

(Заметим, что наблюдаемой частотой является $\omega/\sqrt{g_{00}}$, однако благодаря стационарности метрики различие между ω и $\omega/\sqrt{g_{00}}$ здесь несущественно.)

Как мы видели, в коротковолновом приближении электромагнитное поле можно представить в форме разложения (3). Выясним, какие условия следует наложить на «амплитуды» $F_{(\nu)ab}$ и параметр ε, чтобы ряд (3) описывал квазимонохроматическое излучение.

В силу равенства (11) решение уравнения эйконала в стационарном поле тяготения имеет вид

$$S(x^i) = -x^0 + \varphi(x^\alpha). \tag{15}$$

Поэтому применительно к рассматриваемому случаю ряд (3) можно переписать следующим образом:

$$F_{ab}(x^i) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (i\varepsilon)^\nu F_{(\nu)ab}(x_i)\, e^{-\frac{ix^0}{\varepsilon} + \frac{i\varphi(x^\alpha)}{\varepsilon}}. \tag{16}$$

Для квазимонохроматического излучения выражение (16) должно совпадать с (12), и, значит, имеют место соотношения:

$$\varepsilon = \frac{c}{\bar{\omega}}; \tag{17а}$$

$$f_{ab}(x^0, x^\alpha) = e^{\frac{i\varphi(x^\alpha)}{\varepsilon}} \sum_{\nu=0}^{\infty} (i\varepsilon)^\nu F_{(\nu)ab}(x^i). \tag{17б}$$

Смысл равенства (17а) очевиден: оно связывает параметр ε со средней частотой. Из (17б) вытекает, что «амплитуды» $F_{(\nu)ab}$ содержат в своем спектре только низкочастотные гармоники. Если $(-\Delta\omega, +\Delta\omega)$ — соответствующий эффективный спектральный интервал, то согласно (14) и (17а)

$$\Delta\omega \ll \frac{c}{\varepsilon}. \tag{18}$$

Таким образом, при выполнении условия (18) разложение (16) соответствует квазимонохроматическому излучению со средней частотой c/ε.

Теперь покажем, что в стационарном гравитационном поле задача о квазимонохроматическом излучении сводится к задаче о строго монохроматическом излучении, по крайней мере в том смысле, что, ограничиваясь первыми двумя членами разложения (16), можно определить зависимость тензора электромагнитного поля от пространственных координат, оставляя при этом неопределенной зависимость от x^0 (точнее, как показано ниже, от $-S(x^i)$).

Предположим, что эйконал, соответствующий конкретной постановке задачи, нам известен. Как уже было сказано, он имеет вид (15).

Рассмотрим общую схему решения уравнений (7б) и (7в), определяющих «амплитуды» $F_{(\nu)ab}$. Начальные условия можно задать на любой гиперповерхности, обладающей тем свойством, что каждый луч конгруэнции (8) пересекает ее в одной и только в одной точке. Поскольку мы хотим сохранить свободу в выборе зависимости электромагнитного поля от x^0 (разумеется, в пределах, допускаемых неравенством (18)), в качестве гиперповерхности начальных условий удобно взять гиперповерхность $f(x^\alpha)=0$, уравнение которой не содержит временной координаты. Без ограничения общности примем $f(x^\alpha)\equiv x^3$, что легко достигается соответствующим преобразованием пространственных координат. Тогда начальные значения «амплитуд» $F_{(\nu)ab}$ можно представить в виде

$$F_{(\nu)ab}(x^0, x^1, x^2, 0) = f_{(\nu)ab}(S, x^1, x^2). \qquad (19)$$

$$\nu = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$$

Из последующего станет ясно, почему в правой части (19) в качестве независимой переменной фигурирует S, а не x^0.

Обратимся к уравнению (7б). Чтобы определить структуру его решения, перейдем к новым координатам:

$$x'^0 = -S(x^i) = x^0 - \varphi(x^\alpha);\ \ x'^\alpha = x^\alpha. \qquad (20)$$

Ясно, что это преобразование не нарушает стационарности метрики. Чтобы избежать путаницы, будем отмечать штрихом величины, отнесенные к новым координатам. Простое вычисление дает для компонент 4-вектора k'^α выражения

$$k'^0 = 0;\quad k'^\alpha = k^\alpha, \qquad (21)$$

и поэтому в новых координатах уравнение (7б) принимает вид

$$F'_{(0)\,ab;\alpha}k^\alpha + \theta F'_{(0)\,ab} = 0. \qquad (22)$$

В отличие от (7б) уравнение (22) не содержит производных от $F'_{(0)ab}$ по x'^0, так что временна́я координата входит в него чисто алгебраически, как параметр, содержащийся в начальных условиях. Возвращаясь к прежней системе координат, можно в общем случае написать

$$F_{(0)\,ab} = F_{(0)\,ab}(-S(x^i), x^\alpha). \qquad (23)$$

Итак, если $F_{(0)ab}$ зависит не только от пространственных координат x^α, но и от временной координаты x^0, то эта зависимость обязательно имеет вид (23). Аналогичное утверждение справедливо и для всех остальных амплитуд» $F_{(\nu)ab}$ ($\nu=1,\ 2, \ldots$), в чем легко убедиться, записывая уравнения (7в) в координатах (20) и применяя метод математической индукции. Именно поэтому мы приняли начальные условия в форме (19).

Внося (23) в (7б) и учитывая уравнение эйконала (7а), будем иметь

$$F_{(0)\,ab^*;\,c}k^c + \theta F_{(0)\,ab} = 0. \qquad (24)$$

Здесь и далее звездочкой обозначены операции ковариантного дифференцирования, которые выполняются так, как если бы дифференцируемая величина не зависела от $-S(x^i)=x^0-\varphi(x^\alpha)$.

Таким образом, чтобы найти решение уравнения (7б), достаточно решить вспомогательное уравнение (24), рассматривая при этом $-S(x^i)$ как некоторый параметр, входящий в начальные условия (19).

Перейдем теперь к уравнению (7в). Полагая в нем $\nu=0$, получим

$$F_{(1)\,ab;\,c}k^c + \theta F_{(1)\,ab} = -\frac{1}{2}\,(\Box F_{(0)\,ab} + R_{abik}F^{ik}_{(0)}). \tag{25}$$

Нетрудно убедиться в том, что для нахождения правой части этого уравнения нет необходимости знать зависимость $F_{(0)ab}$ от $-S(x^i)$ в явном виде. Действительно, прямое вычисление с учетом равенств (23) и (24) дает $\Box F_{(0)ab} = {}^*\Box F_{(0)ab}$, так что (25) можно переписать так:

$$F_{(1)\,ab;c}k^c + \theta F_{(1)\,ab} = -\frac{1}{2}({}^*\Box F_{(0)\,ab} + R_{abik}F^{ik}_{(0)}). \tag{26}$$

К этому уравнению применима изложенная выше схема решения уравнения (7б).

В общем случае, когда $\nu\neq 0$, уравнение (7в) уже нельзя привести к форме (26). Причина этого заключается в том, что при $\nu\neq 0$ $\Box F_{(\nu)ab} \neq {}^*\Box F_{(\nu)ab}$. Вычисления, которые мы опускаем, приводят к следующему результату:

$$F_{(\nu+1)\,ab;\,c}k^c + \theta F_{(\nu+1)\,ab} = -\frac{1}{2}(\delta^i_a\,\delta^k_b{}^*\Box +$$

$$+ R_{ab..}^{..ik})\sum_{\mu=0}^{\nu}(-1)^{\mu}\frac{\partial^{\mu}}{(\partial x^0)^{\mu}}F_{(\nu-\mu)\,ik}, \tag{27}$$

в справедливости которого можно убедиться по индукции. Как частный случай при $\nu=0$ из уравнения (27) следует (26).

Из уравнения (27) видно, что сведение задачи о квазимонохроматическом излучении к задаче о строго монохроматическом излучении не может быть полным. Так, уравнение, определяющее $F_{(2)ab}$ уже содержит в правой части производную $\partial/\partial x^0(F_{(0)ab})$, которая, в силу принятого нами произвольного выбора зависимости величин $F_{(\nu)ab}$ от временно́й координаты, не определена. Поэтому, чтобы найти $F_{(2)ab}$ необходимо задать зависимость $F_{(0)ab}$ от x^0, т. е. перейти к рассмотрению квазимонохроматической радиации частного вида.

Таким образом, задачу о квазимонохроматическом электромагнитном излучении в стационарном поле тяготения можно привести к задаче о монохроматическом излучении только в линейном (относительно параметра ε) приближении, когда учитываются лишь два члена разложения (16). В большинстве случаев этого достаточно, чтобы определить влияние поля тяготения на корреляционные свойства электромагнитного излучения, в частности на поляризацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. «Наука», М., 1973.
2. *Манджос А. В., Хмиль С. В.* К вопросу о распространении квазимонохроматического излучения в гравитационных полях. — Настоящий сборник, с. 85.
3. *Мицкевич Н. В.* Физические поля в общей теории относительности. «Наука», М., 1969.

4. *Ehlers J.* Zum Übergand von der Wellenoptik zur geometrischen Optik in der allgemeinen Relativitätstheorie. — Z. Naturforsch., 1967, **22a**, 1328.
5. *Sachs R.* Gravitational waves in general relativity. VI. The outgoing radiation condition. — Proc. Roy. Soc. (London), 1961, **A264**, 309.

Киевский государственный
университет

Поступила в редколлегию
в июне 1975 г.

S. V. KHMIL'

ON THE QUASI-MONOCHROMATIC RADIATION IN STATIONARY GRAVITATIONAL FIELD

Summary

It is shown that in an average wavelength linear approximation the problem of the quasi-monochromatic electromagnetic radiation in a stationary gravitational field can be reduced to the case of monochromatic waves.