

33. Pilcher C. B., Prinn R. G., McCord T. B. Spectroscopy of Jupiter: 3200 to 11200 Å. — J. Atm. Sci., 1973, 30, 302.
34. Tomasko M. G., Clements A. E., Castillo N. D. Limb darkening of two latitudes of Jupiter at phase angles of 34° and 109°. — J. Geophys. Res., 1974, 79, 3653.

Главная астрономическая
обсерватория АН УССР

Поступила в редакцию
в июне 1975 г.

V. V. AVRANCHUK, L. A. BUGAENKO,
A. V. MOROZHENKO, E. G. YANOVITSKIJ

RESULTS OF STUDIES OF JUPITER
OBTAINED AT THE MAIN ASTRONOMICAL
OBSERVATORY OF THE UKRAINIAN ACADEMY OF SCIENCES

Summary

The paper deals with a review of spectrophotometric and polarimetric investigations carried out at the Main Astronomical Observatory. Using the extensive measurements of the methane (6190 Å) and ammonia (6450 Å) absorption bands, the variations in the absorption over the planetary disk as well as its time variations were studied. The molecular absorption in weak bands of methane (5430, 5760, 5970, 6660, 6860 and 7020 Å) and ammonia (5520 Å) was examined. The brightness coefficients of the planetary disk at λ 4600—8500 Å are determined. The reliable data on dependence of polarization upon the phase angle are obtained for different spectral regions at λ 3160—7980 Å for both the whole planetary disk and its centre. The real part of the refractive index ($n_r = 1.36 \pm 0.01$), mean radius of particles ($r_0 \approx 0.2\mu$) and size dispersion ($\sigma^2 \approx 0.30$) are determined for the Jovian cloud layer. For this model the spherical albedo at different wavelengths was calculated from the observed geometrical albedo. In particular, the phase integral for λ 6260 Å was found to be 1.49. The atmospheric pressure P_0 at the boundary of a cloud layer ($0.1 \leq P_0 \leq 0.3$ atm) was estimated. The asymptotic formula is given for estimating effective optical depth of the absorption band formation in a cloudy atmosphere.

УДК 523.035.2

Ж. М. Длугач

**РАСЧЕТ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ
В ОДНОРОДНОЙ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ АТМОСФЕРЕ
ПРИ ИЗОТРОПНОМ РАССЕЯНИИ**

При решении задач переноса излучения в рассеивающих средах значительный интерес представляет расчет поля излучения внутри атмосферы. Эта задача давно уже интересует физиков и геофизиков, которые разработали для ее численного решения ряд методов. В последнее время в связи с проведением оптического зондирования атмосферы Венеры эта задача приобрела важное значение и в астрофизике.

Изучение внутреннего поля излучения, по-видимому, лучше всего начать с самого простого случая, а именно, с рассмотрения однородной полубесконечной плоской атмосферы. По мере углубления в такую среду характер поля излучения постепенно упрощается, и на больших оптических глубинах ($\tau \geq \tau_{as} \gg 1$) наступает некоторый асимптотический режим, свойства которого хорошо изучены (см. [3]). Гораздо сложнее провести расчет поля излучения на оптических глубинах $\tau < \tau_{as}$, т. е. в некотором пограничном слое. Так как возможно только численное решение поставленной задачи, то очень важно, чтобы оно проводилось максимально простым методом. Лэкис и Хансен

[6], Пласс и др. [7] для этой цели применяют метод сложения слоев, который в данном случае, по нашему мнению, не является оптимальным.

В. В. Иванов [1] сформулировал принципы инвариантности нового типа в задачах переноса излучения в полубесконечных атмосферах, одним из следствий которых явился чрезвычайно простой и, как будет показано ниже, очень эффективный метод расчета внутренних полей излучения в полубесконечных средах. Численной реализации этого метода в случае изотропного рассеяния и посвящена настоящая работа.

МЕТОД РАСЧЕТА

Рассмотрим плоскую полубесконечную однородную атмосферу, освещенную параллельными лучами. Обозначим $I(\tau, \mu, \mu_0)$ — интенсивность диффузного излучения на оптической глубине τ , μ — косинус угла между направлением распространения излучения и положительным направлением оси τ , так что $\mu > 0$ для излучения, идущего в сторону роста τ (вниз), μ_0 — косинус угла падения освещавшего излучения. Будем считать, что внешнее излучение создает освещенность μ_0 на границе атмосферы. Тогда, согласно [1], имеет место следующее соотношение инвариантности:

$$I(\tau_1 + \tau_2, \mu, \mu_0) = e^{-\tau_1/\mu_0} I(\tau_2, \mu, \mu_0) + 2 \int_0^1 I(\tau_1, \mu', \mu_0) I(\tau_2, \mu, \mu') d\mu' + \\ + I(\tau_1, \mu, \mu_0) e^{-\tau_2/\mu} \Theta(\mu), \quad (1)$$

$$(-1 \leq \mu \leq 1; 0 \leq \mu_0 \leq 1),$$

из которого при $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ получается формула удвоения:

$$I(2\tau, \mu, \mu_0) = I(\tau, \mu, \mu_0) (e^{-\tau/\mu_0} + e^{-\tau/\mu} \Theta(\mu)) + 2 \int_0^1 I(\tau, \mu', \mu_0) I(\tau, \mu, \mu') d\mu', \quad (2)$$

где $\Theta(\mu)$ — единичная функция скачка, т. е.

$$\Theta(\mu) = \begin{cases} 0, & \mu \leq 0, \\ 1, & \mu > 0. \end{cases} \quad (3)$$

Если в (1) положить $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = 0$, то, принимая во внимание соотношение

$$I(0, -\mu, \mu_0) = \rho(\mu, \mu_0) \cdot \mu_0, \quad (4)$$

где $\rho(\mu, \mu_0)$ — коэффициент отражения полубесконечной атмосферы, получаем

$$I(\tau, -\mu, \mu_0) = e^{-\tau/\mu_0} \rho(\mu, \mu_0) \mu_0 + 2 \int_0^1 I(\tau, \mu', \mu_0) \rho(\mu, \mu') \mu' d\mu'. \quad (5)$$

(Формула (5) является известным соотношением инвариантности в форме Чандрасекара [4].)

Для функции $I(\tau, \mu, \mu_0)$ в [1] были получены также следующие интегральные соотношения:

$$2 \int_0^1 I(\tau, \mu', \mu_0) u(\mu') \mu' d\mu' = \mu_0 \cdot u(\mu_0) (e^{-k\tau} - e^{-\tau/\mu_0}), \quad (6)$$

$$2 \int_0^1 I(\tau, \mu, \mu') i(\mu') d\mu' = i(\mu) (e^{-k\tau} - e^{-\tau/\mu} (\Theta \mu)). \quad (7)$$

Здесь $u(\mu)$ — решение проблемы Милна для диффузно пропущенного излучения, $i(\mu)$ — относительное угловое распределение интенсивности излучения в глубоких слоях полубесконечной среды, k — показатель диффузии. Функция $u(\mu)$ нормирована согласно условию

$$2 \int_0^1 u(\mu) i(\mu) \mu d\mu = 1 \quad (7a)$$

(система обозначений, принятая Соболевым [3]).

Формула удвоения (2) с точки зрения проведения численных расчетов привлекает своей простотой, поскольку она вовсе не требует проведения интегрирования по пространственной координате τ , а также какой-либо итерационной процедуры. Действительно, если известен коэффициент отражения полубесконечной атмосферы $\rho(\mu, \mu_0)$ и для начального значения $\tau=\tau_0$ определена величина $I(\tau, \mu, \mu_0)$, то, воспользовавшись (2), простым интегрированием можно найти интенсивности восходящего и нисходящего излучения на глубинах 2τ , 4τ , 8τ и т. д. Следует отметить, что в любой момент можно от формулы удвоения перейти к формуле сложения слоев (1). При этом очень важно иметь в виду, что соотношения (6) и (7) могут служить для «интегральной» оценки точности определения $I(\tau, \mu, \mu_0)$ на каждом этапе удвоения.

Остановимся на определении начального значения $I(\tau_0, \mu, \mu_0)$. Воспользуемся следующим принципом инвариантности Чандрасекара [4]:

$$I(\tau, \mu, \mu_0) = \sigma(\tau, \mu, \mu_0) \mu_0 + 2 \int_0^1 \rho(\tau, \mu, \mu') I(\tau, -\mu', \mu_0) \mu' d\mu', \quad (8)$$

где $\rho(\tau, \mu, \mu_0)$ и $\sigma(\tau, \mu, \mu_0)$ — соответственно коэффициенты отражения и пропускания света слоем оптической толщины τ . Если в слое толщины τ_0 учитывать только рассеяния первого и второго порядка, то из (8), принимая во внимание (5), для интенсивности нисходящего излучения получаем

$$\begin{aligned} I(\tau_0, \mu, \mu_0) &= \sigma^{(2)}(\tau_0, \mu, \mu_0) \mu_0 + 2 \mu_0 e^{-\tau_0/\mu_0} \int_0^1 \rho^{(2)}(\tau_0, \mu, \mu') \rho(\mu', \mu_0) \mu' d\mu' + \\ &+ 4 \mu_0 \int_0^1 \rho^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu') \mu' d\mu' \int_0^1 \sigma^{(1)}(\tau_0, \mu'', \mu_0) \rho(\mu', \mu'') \mu'' d\mu'' + \\ &+ 8 \mu_0 e^{-\tau_0/\mu_0} \int_0^1 \rho^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu') \mu' d\mu' \int_0^1 \rho(\mu', \mu'') \mu'' d\mu'' \int_0^1 \rho^{(1)}(\tau_0, \mu'', \mu''') \rho(\mu''', \mu_0) \mu''' d\mu'''. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\rho^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu_0)$ и $\sigma^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu_0)$ — коэффициенты отражения и пропускания слоем толщины τ_0 с учетом рассеяния первого порядка, а $\rho^{(2)}(\tau_0, \mu, \mu_0)$ и $\sigma^{(2)}(\tau_0, \mu, \mu_0)$ — с учетом рассеяния двух порядков. Формулы для их определения даны в конце статьи.

Интенсивность восходящего излучения $I(\tau_0, -\mu, \mu_0)$ будем вычислять с помощью формулы (5). Начальное значение τ_0 выбирается таким, чтобы $I(\tau_0, \mu, \mu_0) (-1 \leq \mu \leq 1)$ было посчитано с максимально возможной точностью (мы можем контролировать «интегральную» точность, оцениваемую по формулам (6) и (7)).

Вообще говоря, чем меньше τ_0 , тем $I(\tau_0, \mu, \mu_0)$, вычисленное по формуле (9), должно быть точнее. Но так как $\rho(\mu, \mu_0)$ посчитано с определенной погрешностью, а также из-за погрешностей квадратурной формулы и ограниченности разрядной сетки машины, всегда можно найти такое τ_0 , дальнейшее уменьшение которого не приводит к увеличению точности определения $I(\tau_0, \mu, \mu_0)$. Начальное значение $I(\tau_0, \mu, \mu_0)$ можно также определить, учитывая только однократное рассеяние в формулах (8) и (5), но тогда для достижения той же точности придется τ_0 взять гораздо меньшим (по нашим расчетам, примерно на порядок), а это приводит к удлинению счета.

Точность начального приближения $I(\tau_0, \mu, \mu_0)$ играет существенную роль при всех дальнейших расчетах. Действительно, если мы вычислили $I(\tau_0, \mu, \mu_0)$, то можно начать процесс удвоения по формуле (2). При этом очевидно, что для оптической глубины $\tau \ll 1$ интенсивность нисходящего излучения будет мала при $\mu > \tau$ и будет резко возрастать при $\mu \rightarrow 0$ в области $\mu \leq \tau$ (ибо интенсивность восходящего излучения велика по сравнению с интенсивностью нисходящего, а поле диффузного излучения непрерывно по μ). Поэтому из-за сильной «неплавности» подынтегральной функции можно ожидать больших погрешностей при вычислении интегрального члена в (2). Однако этого не происходит. Суть дела заключается в том, что при $\tau \ll 1$ интегральный член крайне мал (примерно $\sim \tau^2$), т. е. в этом случае погрешность будет определяться погрешностью начального приближения.

Иначе обстоит дело в достаточно глубоких слоях среды. Здесь уже, очевидно, интегральный член вносит существенный вклад в величину $I(\tau, \mu, \mu_0)$ и поэтому, как легко видеть, на каждом этапе удвоения примерно будет удваиваться и погрешность. Но при больших τ подынтегральная функция становится более «плавной», и интеграл вычисляется достаточно точно.

Как показал В. В. Соболев [2], в глубоких слоях среды при $\tau \geq \tau_{as}$ выполняется следующее соотношение:

$$I(\tau, \mu, \mu_0) \approx I^{(as)}(\tau, \mu, \mu_0), \quad (10)$$

где

$$I^{(as)}(\tau, \mu, \mu_0) = i(\mu) u(\mu_0) \mu_0 e^{-k\tau}. \quad (11)$$

Как видно из формулы (11), при больших τ интенсивность излучения либо постоянна (консервативный случай), либо экспоненциально убывает, а в то же время погрешность вычисления $I(\tau, \mu, \mu_0)$ по формуле удвоения, как уже подчеркивалось, возрастает. Следовательно, всегда можно найти такое τ , для которого величина

$$\sum_{\mu, \mu_0} \frac{|I^{(as)}(\tau, \mu, \mu_0) - I(\tau, \mu, \mu_0)|}{I^{(as)}(\tau, \mu, \mu_0)} = \varepsilon \quad (12)$$

принимает минимальное значение. Это значение τ и будет последним в процессе нахождения $I(\tau, \mu, \mu_0)$ по формуле (2). В более глубоких слоях среды интенсивность излучения определяется формулой (11).

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Методом, описанным выше, были рассчитаны величины $I(\tau, \mu, \mu_0)$ ($-1 < \mu < 1$) для двух значений альбедо однократного рассеяния $\lambda=1.0$ и 0.9 при сферической индикаторице рассеяния. Расчет коэффициентов отражения $\rho(\mu, \mu_0)$ проводился методом, описанным в [5]. Начальное значение τ_0 выбиралось таким, чтобы $I(\tau_0, \mu, \mu_0)$, вычисленное по формулам (9) и (5), было посчитано с максимально возможной точностью. Это значение τ_0 оказалось равным 2^{-14} . Интегри-

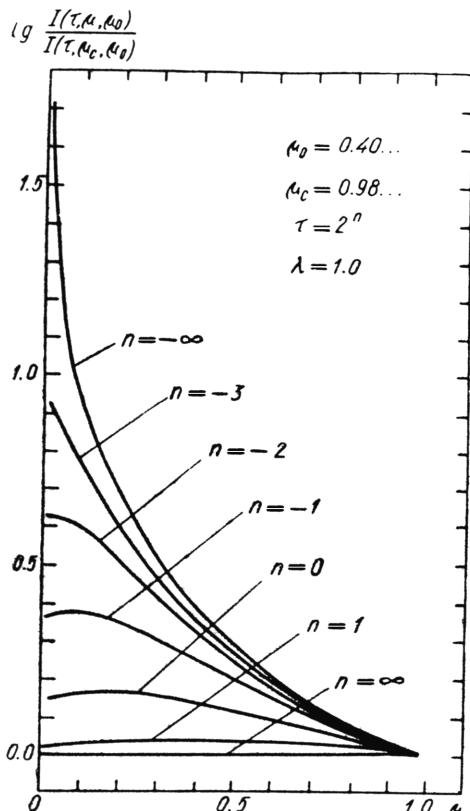


Рис. 1. Логарифм относительного распределения интенсивности нисходящего излучения на различных оптических глубинах при консервативном рассеянии.

рование проводилось с использованием квадратурной формулы Гаусса. Количество точек деления принималось равным 8, соответствующие узлы на интервале $[0, 1]$ приводим ниже:

n	μ_n	n	μ_n
1	0.01985505	5	0.5917173
2	0.1016667	6	0.7627662
3	0.2372338	7	0.8983332
4	0.4082827	8	0.9801449

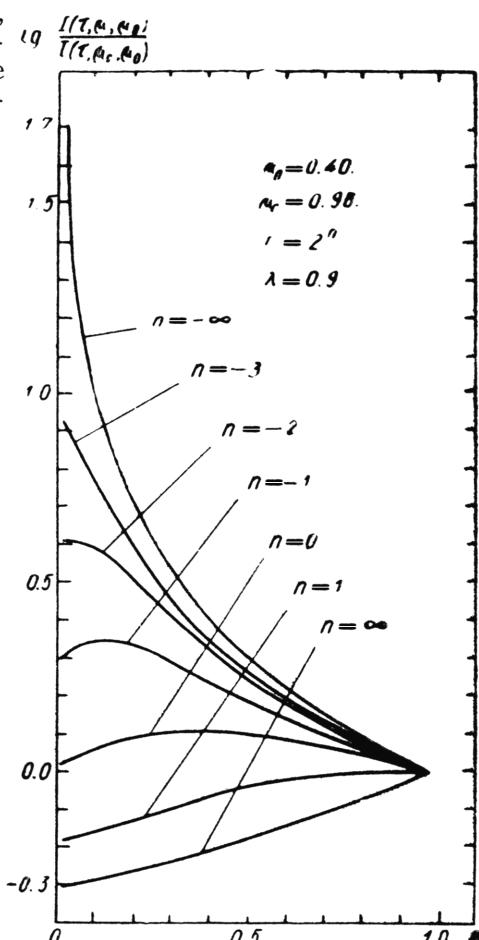


Рис. 2. Логарифм относительного распределения интенсивности нисходящего излучения на различных оптических глубинах при неконсервативном рассеянии.

На рис. 1 и 2 приведены зависимости от μ отношения интенсивности нисходящего излучения $I(\tau, \mu, \mu_0)$ к $I(\tau, \mu_c, \mu_0)$ для различных значений $\tau=2^n$ и $\mu=\mu_c=0.98\dots$, $\mu_0=0.40\dots$, $\lambda=1.0$ и 0.9. Из рис. 1 и 2 видно, что для малых τ интенсивность нисходящего излу-

чения сильно зависит от μ . Далее в пограничном слое ($\tau \leq \tau_{as}$) происходит сглаживание этой зависимости по мере роста оптической глубины. При $\tau \approx 2$ наступает «почти асимптотический» режим. Подобная зависимость имеет место для всех $0 < \mu_0 < 1$.

На рис. 3 и 4 даны аналогичные графики для интенсивности восходящего излучения, а именно $\frac{I(\tau, -\mu, \mu_0)}{I(\tau, -\mu_c, \mu_0)}$ для различных $\tau = 2^n$ и $\lambda = 1.0$ и 0.9 соответственно. Сплошные линии относятся к $\mu_0 = 0.40 \dots$, а пунктирные — к $\mu_0 = 0.98 \dots$. Легко видеть, что интенсивность

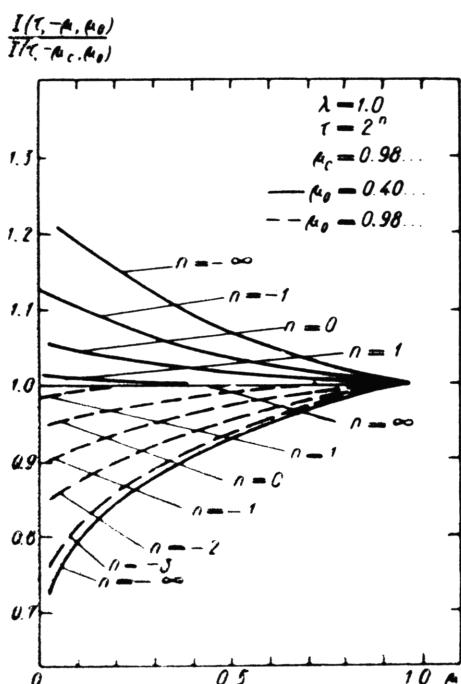


Рис. 3. Относительное распределение интенсивности восходящего излучения на различных оптических глубинах при консервативном рассеянии.

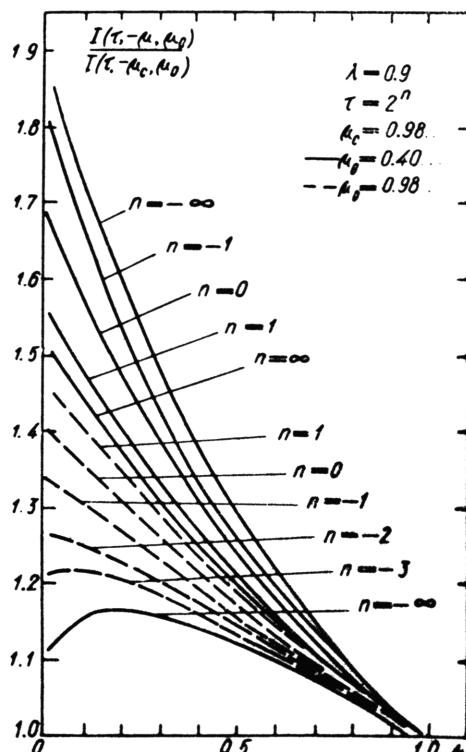


Рис. 4. Относительное распределение интенсивности восходящего излучения на различных оптических глубинах при неконсервативном рассеянии.

восходящего излучения слабо зависит от μ при всех τ . Асимптотический режим наступает примерно при тех же значениях τ , что и для интенсивности нисходящего излучения.

На рис. 5 представлена зависимость $I(\tau, \mu_c, \mu_0)$ от τ для $\mu_0 = 0.40 \dots$, $\lambda = 1$ (сплошная линия) и $\lambda = 0.9$ (пунктирная), а на рис. 6 и 7 приведены графики функции $I(\tau, -\mu_c, \mu_0)$ в зависимости от τ для $\mu_0 = 0.40 \dots$ (сплошная линия) и $\mu_0 = 0.98 \dots$ (пунктирная) при $\lambda = 1.0$ (рис. 6) и $\lambda = 0.9$ (рис. 7). Слева от оси ординат по оси абсцисс вместо оптической глубины τ отложены величины $n(\tau = 2^n)$. Из рис. 5—7 видно, что с увеличением поглощения оптическая глубина, на которой наступает асимптотический режим, растет (это отмечалось уже ранее в [7]). Для $\lambda = 1.0$ и 0.9 значения τ_{as} , полученные с помощью соотношения (12), оказались соответственно равными 8 и 16.

Точность всех проведенных расчетов оценивалась из сравнения значений $I^{(as)}(\tau_{as}, \mu, \mu_0)$, вычисленных с помощью (11), и значений

$I(\tau_{as}, \mu, \mu_0)$, полученных по формуле (2). Кроме того, на каждом этапе удвоения для всех μ и μ_0 контролировалась «интегральная» погрешность, оцениваемая по формулам (6) и (7). В случае консервативного рассеяния ($\lambda=1$) погрешность равна единице четвертой значащей цифры. Для $\lambda=0.9$ точность оказывается ниже; наибольшая погрешность равна пяти единицам четвертой значащей цифры. Ухуд-

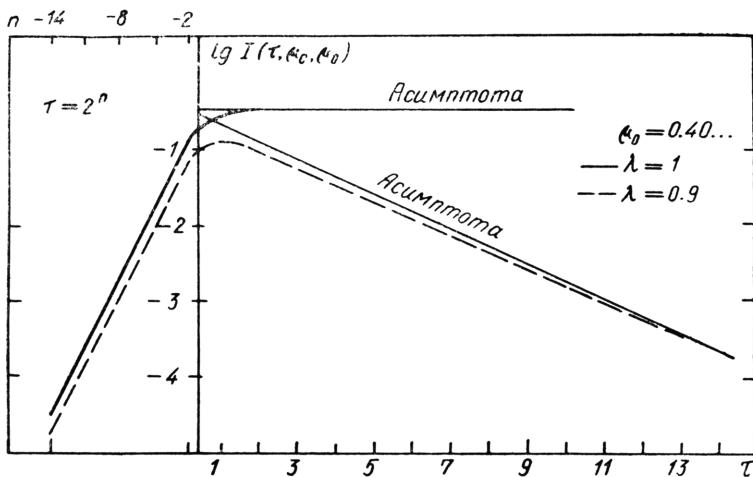


Рис. 5. Зависимость логарифма интенсивности нисходящего излучения $I(\tau, \mu, \mu_0)$ от оптической глубины τ .

шение точности можно объяснить тем, что с увеличением поглощения, во-первых, увеличивается погрешность квадратурной формулы (из-за ухудшения «плавности» подынтегральной функции); во-вторых, так как асимптотический режим достигается на большей оптической глубине, чем для $\lambda=1.0$, то было проведено еще одно удвоение.

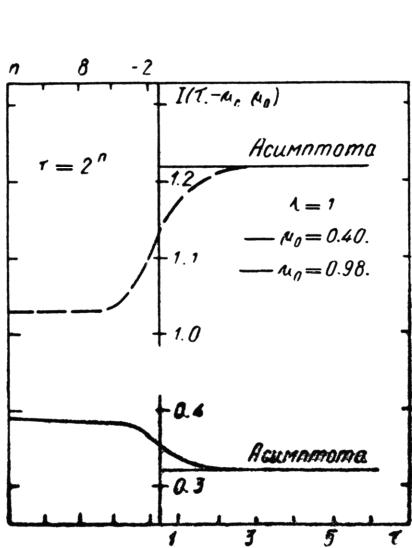


Рис. 6. Зависимость интенсивности восходящего излучения $I(\tau, -\mu_c, \mu_0)$ при консервативном рассеянии от оптической глубины τ .

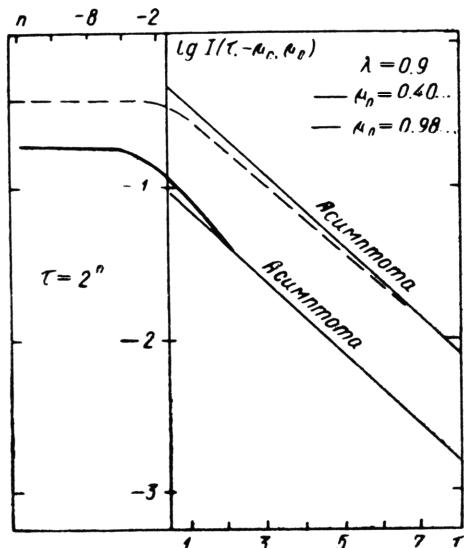


Рис. 7. Зависимость логарифма интенсивности восходящего излучения при неконсервативном рассеянии $I(\tau, -\mu_c, \mu_0)$ от оптической глубины τ .

Как известно, важными характеристиками поля излучения в полу бесконечной среде являются функция источника $B(\tau, \mu_0)$ и фундамен-

тальная функция $\Phi(\tau)$ [3]. Знание функции $\Phi(\tau)$ позволяет рассчитать световой режим при любых внутренних источниках излучения, зависящих только от глубины. В случае изотропного рассеяния

$$B(\tau, \mu_0) = \frac{\lambda}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu, \mu_0) d\mu + \frac{\lambda}{4} e^{-\tau/\mu_0} \quad (13)$$

и

$$\Phi(\tau) = 2 \int_0^1 B(\tau, \mu_0) \frac{d\mu_0}{\mu_0} \quad (14)$$

или

$$\bar{\Phi}(\tau) = \lambda \int_0^1 \frac{d\mu_0}{\mu_0} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu, \mu_0) d\mu + \frac{\lambda}{2} E_1(\tau), \quad (15)$$

где

$$E_1(\tau) = \int_0^1 e^{-\tau/\mu_0} \frac{d\mu_0}{\mu_0}. \quad (16)$$

Таким образом, зная интенсивность излучения внутри полубесконечной среды, можно вычислить значения функции источника и фундаментальной функции. В качестве примера в таблице приведены значения $\Phi(\tau)$ для различных $\tau=2^n$ при $\lambda=1.0$ и 0.9 .

Нужно подчеркнуть, что для расчета функции $\Phi(\tau)$ существует много различных методов. Однако не исключено, что для расчета этой функции метод удвоения может оказаться наиболее рациональным в смысле простоты, скорости и точности его численной реализации, но этот вопрос следует рассмотреть отдельно. Подчеркнем только, что определив функцию $\Phi(\tau)$, мы тем самым дали полное численное решение проблемы переноса излучения в плоской однородной атмосфере.

n	$\lambda=1.0$	$\lambda=0.9$	n	$\lambda=1.0$	$\lambda=0.9$
-14	5.629	4.659	-4	2.384	1.663
-13	5.282	4.347	-3	2.151	1.402
-12	4.937	4.036	-2	1.969	1.153
-11	4.592	3.725	-1	1.840	0.9017
-10	4.249	3.416	0	1.767	0.6361
-9	3.910	3.108	1	1.738	0.3572
-8	3.576	2.805	2	1.732	0.1222
-7	3.253	2.507	3	1.732	0.01487
-6	2.945	2.218	4		0.0002221
-5	2.654	1.987			

В дальнейшем по изложенной здесь методике предполагается произвести расчет внутренних полей излучения в случае анизотропного рассеяния.

В заключение приведем сводку формул, необходимых для определения коэффициентов отражения и пропускания слоем толщины τ_0 с учетом рассеяния одного и двух порядков. В случае изотропного рассеяния имеем:

$$\rho^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu_0) = \frac{\lambda}{4} \frac{1 - e^{-\tau_0(1/\mu + 1/\mu_0)}}{\mu + \mu_0}, \quad (17)$$

$$\sigma^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu_0) = \begin{cases} \frac{\lambda}{4} \frac{e^{-\tau_0/\mu} - e^{-\tau_0/\mu_0}}{\mu - \mu_0}, & \mu \neq \mu_0, \\ \frac{\lambda}{4} e^{-\tau_0/\mu} \frac{\tau_0}{\mu^2}, & \mu = \mu_0, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \rho^{(2)}(\tau_0, \mu, \mu_0) &= \rho^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu_0) + \frac{\lambda}{2(\mu + \mu_0)} \left[\mu \int_0^1 \rho^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu') d\mu' + \right. \\ &\quad + \mu_0 \int_0^1 \rho^{(1)}(\tau_0, \mu', \mu_0) d\mu' - \mu e^{-\tau_0/\mu_0} \int_0^1 \sigma^{(1)}(\tau_0, \mu', \mu) d\mu' - \\ &\quad \left. - \mu_0 e^{-\tau_0/\mu} \int_0^1 \sigma^{(1)}(\tau_0, \mu', \mu_0) d\mu' \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Если $\mu \neq \mu_0$, то

$$\begin{aligned} \sigma^{(2)}(\tau_0, \mu, \mu_0) &= \sigma^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu_0) + \frac{\lambda}{2(\mu - \mu_0)} \left[\mu \int_0^1 \sigma^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu') d\mu' - \right. \\ &\quad - \mu_0 \int_0^1 \sigma^{(1)}(\tau_0, \mu', \mu_0) d\mu' + \mu_0 e^{-\tau_0/\mu_0} \int_0^1 \rho^{(1)}(\tau_0, \mu', \mu_0) d\mu' - \\ &\quad \left. - \mu e^{-\tau_0/\mu_0} \int_0^1 \rho^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu') d\mu' \right], \end{aligned} \quad (20)$$

а при $\mu = \mu_0$

$$\sigma^{(2)}(\tau_0, \mu, \mu) = \sigma^{(1)}(\tau_0, \mu, \mu) + \frac{\lambda^2}{8} \left[\int_0^1 f(\tau_0, \mu, \mu') d\mu' + \int_0^1 f_1(\tau_0, \mu, \mu') d\mu' \right]. \quad (21)$$

Функции $f(\tau_0, \mu, \mu')$ и $f_1(\tau_0, \mu, \mu')$ вычисляются следующим образом:

$$f(\tau_0, \mu, \mu') = \begin{cases} \frac{\tau_0 e^{-\tau_0/\mu}}{\mu(\mu - \mu')} - \frac{\mu'(e^{-\tau_0/\mu} - e^{-\tau_0/\mu'})}{(\mu - \mu')^2}, & \mu \neq \mu', \\ \frac{1}{2} \frac{\tau_0^2}{\mu^3} e^{-\tau_0/\mu}, & \mu = \mu' \end{cases} \quad (22)$$

и

$$f_1(\tau_0, \mu, \mu') = \frac{\tau_0}{\mu} \frac{e^{-\tau_0/\mu'}}{\mu + \mu'} - \frac{\mu' [1 - e^{-\tau_0(1/\mu + 1/\mu')}] e^{-\tau_0/\mu}}{(\mu + \mu')^2}. \quad (23)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. В. Принципы инвариантности и внутренние поля излучения в полу бесконечных атмосферах. — Астрон. журнал, 1975, 52, 217.
2. Соболев В. В. Диффузия излучения в среде большой оптической толщины при неизотропном рассеянии. — ДАН СССР, 1968, 179, 41.
3. Соболев В. В. Рассеяние света в атмосферах планет. «Наука», М., 1972.
4. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. ИЛ, М., 1953.
5. Dlugach J. M., Yanovitskij E. G. The Optical properties of Venus and the Jovian planets. II. Methods and results of calculations of the intensity of radiation diffusely reflected from semi-infinite homogeneous atmospheres. — Icarus, 1974, 22, 66.
6. Lacis A. A., Hansen J. E. A parameterization for the absorption of solar radiation in the Earth's atmosphere. — J. Atmosp. Sci., 1974, 31, 118.
7. Plass G. N., Kattawar G. W., Binstock J. Interior radiances in optically deep absorbing media. II. Rayleigh scattering. — J. Quant. Spectrosc. and Radiat. Transfer., 1973, 13, 1081.

Главная астрономическая
обсерватория АН УССР

Поступила в редакцию
в мае 1975 г.

J. M. DLUGACH

CALCULATION OF RADIATION FIELD IN HOMOGENEOUS SEMI-INFINITE ATMOSPHERE WITH ISOTROPIC SCATTERING

Summary

The radiation field is calculated in semi-infinite atmosphere with isotropic scattering, using the Ivanov doubling formula. The question of choice of initial optical depth is considered. The results of the calculation of radiation intensity in the atmosphere for two values of single scattering albedo $\lambda=1.0$ and 0.9 given in figures are discussed. The doubling method is shown to be high-efficient. The table of Sobolev function $\Phi(\tau)$ values is presented.