ФИЗИКА ЗВЕЗД

О ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ЗАКОНОВ ПОТЕМНЕНИЯ К КРАЮ КЛАССИЧЕСКИХ ЗВЕЗД

А. А. Рубашевский

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЗАКОНОВ ПОТЕМНЕНИЯ КАК ВОЗМОЖНОСТЬ БОЛЕЕ ТОЧНОГО ОПИСАНИЯ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ ВЫХОДЯЩЕГО ИЗ ЗВЕЗДЫ ИЗЛУЧЕНИЯ

Линейное приближение к законам потемнения к краю для звезд, не имеющих протяженных атмосфер, как уже отмечалось ранее [1, 2], не позволяет одновременно обеспечить условие сохранения полного потока излучения от звезды и наилучшим образом описать распределение яркости по ее диску. Исключение составляют только те звезды, у которых потемнение к краю линейное.

Между тем, распределение яркости по диску звезды является одной из важнейших физических характеристик поля выходящего из нее излучения. Поэтому возникает вопрос, как наиболее простым способом и наиболее достоверно описать распределение яркости по диску звезды, не нарушая при этом условия сохранения полного потока ее излучения. Очевидно, что решение этой задачи следует искать в классе, по крайней мере, двухпараметрических семейств функций, приближенно выражающих законы потемнения.

До сих пор для двухпараметрических приближений законов потемнения к краю классических звезд использовались семейства функций вида

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - A(1-\mu) - Bf(\mu). \qquad (1)$$

Здесь A и B — искомые параметры; $f(\mu)$ — некоторая беспараметрическая монотонная функция, гладкая на интервале $(0;\ 1)$. Физический смысл общепринятых обозначений мы не объясняем.

Для функции $f(\mu)$, играющей роль поправки за нелинейность, Ван'т Вир [3] принимал выражение

$$f(\mu) = (1-\mu)^n. \qquad (2)$$

Он и ряд других авторов (см., например, [4]), варьируя свободный параметр n, добивались наилучшего среднеквадратического представления кривой потемнения, определяя таким способом значения A и B.

Клинглесмит и Собеский [5] предложили иное выражение для $f(\mu)$:

$$f(\mu) = \mu \lg \mu. \qquad (3)$$

Параметры A и B они находили также из условия наилучшего среднеквадратического приближения кривых потемнения к краю. Таким способом для ряда значений длин волн (в интервале 2000—12500 Å), температур (10000—40000° K) и $\log g = 2.5(0.5)4.5$ они рассчитали таблицы значений параметров A и B, а также значения $u_{п}$ теоретических линейных коэффициентов потемнения к краю, исходя из условия сохранения полного потока излучения звезды:

$$\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)} \mu d\mu = \int_0^1 (1 - u_{п} + u_{п}\mu) \mu d\mu. \qquad (4)$$

Однако, согласно этим работам, остается неясным, насколько точно соблюдается условие сохранения полного потока излучения, если считать, что и

$$\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)} \mu d\mu = \int_0^1 \{1-A(1-\mu) - Bf(\mu)\} \mu d\mu, \tag{5}$$

так как точность наилучшего среднеквадратического приближения кривых потемнения к краю оказывается различной в зависимости от вида функции $f(\mu)$. Поскольку в работе [5] приведены таблицы значений A, B и $u_{\text{п}}$, можно оценить точность выполнения условия (5) для функции $f(\mu)$ вида (3).

В работе [5] отмечается, что погрешность численного отыскания из их моделей атмосфер выходящего от звезды потока излучения менее 0.5%; так что правая часть соотношения (4) с табличными значениями $u_{\text{п}}$ легко определяет величину выходящего потока. Кроме того, правая часть соотношения (5) с табличными значениями A и B позволяет получить соответствующее приближение для величины потока.

По данным таблиц [5] мы сравнили величины потоков, определяемые правыми частями соотношений (4) и (5), для моделей с $\log g = 3.5(0.5)4.5$. Значения F_1 и F_2, полученные соответственно из правых частей выражений (4) и (5),

$$F_1 = \frac{3-u_{\text{п}}}{6} I(1), \tag{6}$$

$$F_2 = \left(\frac{3-A}{6} + \frac{BM}{9}\right) I(1); \; M = \lg e \tag{7}$$

различаются не более, чем на 0.46%. При этом наибольшие различия наблюдаются в инфракрасной области спектра при $T = 40000°$ K и $\log g = 3.5$.

Мы сравнили также табличные значения $u_{\text{п}}$ со значениями u_1, которые рассчитывались нами из условия $F_1 = F_2$, т. е.

$$u_1 = A - \frac{2BM}{3}. \tag{8}$$

Разности $u_{\text{п}} - u_1$ в основном возрастают (практически от нуля для $\lambda = 2000$ Å и $T = 10000 \div 40000°$ K) с ростом T и особенно λ. Это возрастание в целом несколько большее для меньших $\log g$ из рассматриваемой нами области. Для $\lambda = 2000$ Å $u_{\text{п}} - u_1$ варьирует в пределах $-0.002 \div +0.002$ в зависимости от T и $\log g$. При $\lambda > 2000$ Å $u_{\text{п}} > u_1$. Максимальные различия $u_{\text{п}}$ и u_1, естественно, соответствуют максимальным различиям F_1 и F_2. Величина $u_{\text{п}} - u_1$ может достигать 0.010—0.013.

Хотя аппроксимация законов потемнения в работе [5] соотношениями (1), (3) и вносит дополнительную ошибку в величину полного потока от звезды, систематически завышая поток, до 0.46%, тем не менее эта ошибка сравнима с точностью самого численного отыскания потока из моделей [5]. Это позволяет считать такую аппроксимацию законов потемнения приемлемой, по крайней мере для моделей [5].

Нам, однако, представляется, что задача отыскания A и B из (1) может быть решена более корректно. Имеем два соотношения: выражение (5) и

$$\int_0^1 \left\{\frac{I(\mu)}{I(1)} - [1-A(1-\mu) - Bf(\mu)]\right\}^2 \mu d\mu = \min, \tag{9}$$

соответствующие поставленной нами задаче обеспечить сохранение полного потока излучения от звезды и добиться при этом наилучшего описания распределения поверхностной яркости по ее диску. Учитывая выражение (4), условие (5) можно записать в виде

$$u_п = A + 6\,BK,\ K = \int_0^1 f(\mu)\,\mu d\mu. \tag{10}$$

Для аппроксимации (1), (3) оно равносильно соотношению

$$u_п = A - \frac{2\,BM}{3}. \tag{11}$$

При использовании же приближения (1), (2) выражение (10) сводится к соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} u_п &= A + 0.3B,\ n = 3;\\ u_п &= A + 0.2B,\ n = 4. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Мы ограничились при этом значениями n, использованными в [3—5].

Учитывая гладкость функции $f(\mu)$, дифференцирование в соотношении (9) можно производить по любому из параметров, A или B, предварительно исключая второй параметр из условия (10). При этом получаем соотношение

$$12\,K\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)}\mu^2 d\mu + 2\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)} f(\mu)\,\mu d\mu +$$

$$+\ 2\,(12\,BK - u_п)\int_0^1 f(\mu)\,\mu^2 d\mu + 2\,B\int_0^1 f^2(\mu)\,\mu d\mu\ -$$

$$-\ 18\,BK^2 + 3\,K u_п - 6\,K = 0. \tag{13}$$

Совместное решение уравнений (10) и (13) определяет искомые A и B.

Для рассмотренных нами аппроксимаций значения A и B определяются из формул

$$\left.\begin{aligned} A &= 21\,u_п + 128\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)}\mu^2 d\mu - 192\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)}\mu^2 \ln\mu\, d\mu - 64,\\ B &= \frac{6}{M}\left\{5\,u_п + 32\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)}\mu^2 d\mu - 48\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)}\mu^2 \ln\mu\, d\mu - 16\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

для приближения, определяемого выражениями (1),(3).

Если используются приближения вида (1) и (2), величины A и B определяются из соотношений: для $n=3$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2}{15}\{-1134\,I_1 + 420\,I_2 - 38\,u_п + 147\},\\ B &= \frac{14}{9}\{324\,I_1 - 120\,I_2 + 13\,u_п - 42\}; \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

для $n=4$

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{4}{31}\{-1197\,I_1 + 315\,I_3 - 32\,u_п + 126\},\\ B &= \frac{15}{31}\{1596\,I_1 - 420\,I_3 + 53\,u_п - 168\}, \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

где

$$I_1 = \int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)} \mu^2 d\mu; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)} \mu^3 (3-\mu)\, d\mu;$$

$$I_3 = \int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)} \mu^3 (\mu^2 - 4\mu + 6)\, d\mu.$$

Высшие моменты относительной интенсивности $\frac{I(\mu)}{I(1)}$, входящие в соотношения (13)—(16), а также другие интегралы в (13) и (14), содержащие $\frac{I(\mu)}{I(1)}$, могут быть найдены численным интегрированием с использованием значений $I(\mu_i)/I(1)$, получаемых из моделей звездных атмосфер. Вообще же выбор $f(\mu)$ следует контролировать условием (9), добиваясь наименьшей (по виду функции $f(\mu)$) суммы квадратов взвешенных по μ_i уклонений от закона потемнения к краю.

ПРИБЛИЖЕНИЯ КРИВЫХ ПОТЕМНЕНИЯ КЛАССИЧЕСКИХ ЗВЕЗД ДВУМЯ ОТРЕЗКАМИ ПРЯМЫХ КАК ПРЕДЕЛЬНЫЕ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗАКОНОВ ПОТЕМНЕНИЯ К КРАЮ

В работе [2] обращалось внимание на то, что законы потемнения, рассчитанные Грыгаром [6] по моделям Михаласа [7] для звезд $B1$ и более ранних, обнаруживают в окрестности $\mu_0=0.1$ характерный излом кривой потемнения, так что можно попытаться представить такую кривую двумя отрезками прямых.

Рассмотрим эту задачу. Мы будем представлять кривую потемнения в области $[\mu_0;\ 1]$ обычным линейным законом потемнения с коэффициентом потемнения u:

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - u + u\mu, \tag{17}$$

а в области $[0;\ \mu_0]$ — другой прямой так, чтобы коэффициент потемнения v определялся из условий

$$\frac{I(0)}{I(1)} = 1 - v, \quad \frac{I(\mu_0)}{I(1)} = 1 - u + u\mu_0. \tag{18}$$

После несложных преобразований получаем для области $[0;\ \mu_0]$

$$\frac{I(\mu)}{I(1)} = 1 - v + \frac{\mu}{\mu_0}(v - u + u\mu_0). \tag{19}$$

Условие сохранения полного потока излучения принимает тогда вид

$$6\int_0^1 \frac{I(\mu)}{I(1)} \mu d\mu = 3 + u(\mu_0^2 - 1) - v\mu_0^2. \tag{20}$$

Дополнительные выражения для определения u, v и положения точки излома μ_0 можно находить по-разному, в зависимости от принятых граничных условий.

Так, условие сохранения полного потока излучения от диска звезды в центральной зоне $[\mu_0;\ 1]$ приводит к соотношению

$$6\int\limits_{\mu_0}^{1}\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu d\mu = 3(1-\mu_0^2) - u(\mu_0-1)^2(2\mu_0+1). \qquad (21)$$

При условиях (20) и (21) наилучшее приближение прямыми распределения поверхностной яркости по диску звезды означает, что

$$\frac{\partial}{\partial\mu_0}\int\limits_0^{\mu_0}\left\{\frac{I(\mu)}{I(1)}-\left[1-v+\frac{\mu}{\mu_0}(v-u+u\mu_0)\right]\right\}^2\mu d\mu +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\mu_0}\int\limits_{\mu_0}^{1}\left\{\frac{I(\mu)}{I(1)}-(1-u+u\mu)\right\}^2\mu d\mu = 0. \qquad (22)$$

Откуда

$$\int\limits_0^{\mu_0}\left\{\frac{I(\mu)}{I(1)}-\left[1-v+\frac{\mu}{\mu_0}(v-u+u\mu_0)\right]\right\}\mu^2 d\mu = 0, \qquad (23)$$

или

$$\frac{12}{\mu_0^3}\int\limits_0^{\mu_0}\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu^2 d\mu = 4 - v - 3u(1-\mu_0). \qquad (24)$$

Совместное решение уравнений (20), (21) и (24) определяет u, v и μ_0.

Сохраняя условие (20), задачу можно поставить и так. На сетке значений μ_0 величины u находятся из условия

$$\int\limits_{\mu_0}^{1}\left\{\frac{I(\mu)}{I(1)}-(1-u+u\mu)\right\}^2\mu d\mu = \min. \qquad (25)$$

Значения u, найденные из (25), подставляются в соотношение для определения v:

$$\int\limits_0^{\mu_0}\left\{\frac{I(\mu)}{I(1)}-\left[1-v+\frac{\mu}{\mu_0}(v-u+u\mu_0)\right]\right\}^2\mu d\mu = \min. \qquad (26)$$

Соотношения (25) и (26) дают наилучшее описание распределений поверхностной яркости в зонах $[\mu_0;\ 1]$ и $[0;\ \mu_0]$. Дифференцирование в (25) следует проводить по u; в (26) — по v. При этом получаем

$$12\int\limits_{\mu_0}^{1}\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu(1-\mu)\,d\mu = (\mu_0-1)^2\{u(\mu_0-1)(3\mu_0+1)+2(2\mu_0+1)\} \qquad (27)$$

и

$$\frac{12}{\mu_0^3}\int\limits_0^{\mu_0}\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu(\mu_0-\mu)\,d\mu = 2 - v + u(\mu_0-1). \qquad (28)$$

Возможен и такой вариант решения поставленной задачи. Снимая с кривой потемнения значение μ_0, находим u и v из условий

(20) и (24). Однако подобная постановка задачи связана с дополнительными ошибками определения μ_0 и поэтому не может считаться наилучшей.

Очевидно, что все три предложенные решения задачи имеют общий предел по мере того, как фактическое распределение яркости $\frac{I(\mu)}{I(1)}$ приближается к аппроксимирующему. Анализ предложенных соотношений показал, что для случая, когда излом кривой потемнения не особенно ощутим, следует использовать соотношения (20), (21) и (24). Для звезд $B1$ и более ранних эта система соотношений, равно как и система (20), (27) и (28), приводит практически к одинаковому результату.

Исключая из (20), (21) и (24) величины u и v, мы приходим к следующему выражению для определения μ_0:

$$\left.\begin{aligned}&6(-3\mu_0^2+\mu_0+1)\int\limits_{\mu_0}^{1}\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu d\mu+6(\mu_0-1)(2\mu_0+1):\times\\&\times\int\limits_0^1\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu d\mu-12\frac{(\mu_0-1)(2\mu_0+1)}{\mu_0}\int\limits_0^{\mu_0}\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu^2 d\mu=\\&=(1-\mu_0)(4\mu_0^2-3)(2\mu_0+1)+3(1-\mu_0^2)(-3\mu_0^2+\mu_0+1).\end{aligned}\right\}\qquad(29)$$

После исключения u и v из системы соотношений (20), (27) и (28) получаем

$$\begin{aligned}&\frac{12(\mu_0^2-\mu_0-1)}{(\mu_0-1)^2}\int\limits_{\mu_0}^{1}\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu(1-\mu)d\mu+6(3\mu_0+1)\int\limits_0^1\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu d\mu-\\&-\frac{12(3\mu_0+1)}{\mu_0}\int\limits_0^{\mu_0}\frac{I(\mu)}{I(1)}\mu(\mu_0-\mu)d\mu=\\&=2(2\mu_0+1)(\mu_0^2-\mu_0-1)+(3-2\mu_0^2)(3\mu_0+1).\end{aligned}\qquad(30)$$

Пусть распределение яркости по диску звезды описывается выражением (1). Тогда при условии (3) задача [(20), (21), (24)] приводит к соотношению

$$12\mu_0(\mu_0+1)\lg\mu_0=M(\mu_0-1)(6\mu_0^2+7\mu_0+8).\qquad(31)$$

В области (0; 1) единственный корень этого уравнения $\mu_0=0.5585$. Отсюда $u=A+\frac{BM}{6}\cdot\frac{3\mu_0^3-4}{1-\mu_0^2}$, $v=A-\frac{BM\mu_0}{2}$.

Задача [(20), (27), (28)] сводится к соотношению

$$\begin{aligned}12\mu_0^3(2\mu_0^2-3)\lg\mu_0=M(\mu_0-1)(12\mu_0^5+2\mu_0^4+\\+2\mu_0^3-31\mu_0^2+2\mu_0+1),\end{aligned}\qquad(32)$$

не имеющему решения в области (0; 1).

Если распределение яркости по диску звезды описывается выражениями (1), (2), мы приходим к следующим соотношениям для задачи [(20), (21), (24)]:

$$4\mu_0^4-13\mu_0^3+6\mu_0^2+13\mu_0-7=0\qquad(n=3),\qquad(33)$$

$$15\mu_0^5-66\mu_0^4+84\mu_0^3+7\mu_0^2-77\mu_0+28=0\qquad(n=4).\qquad(34)$$

Единственные корни этих уравнений в области (0; 1): $\mu_0=0.5341$ для (33) и $\mu_0=0.4498$ для (34).

Для задачи [(20), (27), (28)] мы приходим к таким уравнениям для определения μ_0:

$$32\mu_0^6 - 126\mu_0^5 + 156\mu_0^4 - 30\mu_0^3 - 64\mu_0^2 + 21\mu_0 + 7 = 0 \qquad (n=3), \tag{35}$$

$$90\mu_0^7 - 448\mu_0^6 + 812\mu_0^5 - 564\mu_0^4 - 50\mu_0^3 + 240\mu_0^2 - 51\mu_0 - 17 = 0 \qquad (n=4). \tag{36}$$

Единственные корни этих уравнений в области (0; 1): $\mu_0=0.7053$ для (35) и $\mu_0=0.6080$ для (36).

Можно легко показать, что в приближении (1) выражения (29) и (30) не зависят от A и B при любой $f(\mu)$, гладкой на интервале (0; 1). Это означает, что для каждой конкретной функции $f(\mu)$ для всего семейства законов потемнения, определяемого допустимыми значениями параметров A и B, положение точки излома μ_0 при условии разрешимости задачи всегда одно и то же. В рассмотренных нами частных случаях это иллюстрируется соотношениями (31), (33)—(36).

Примечательно также, что корни уравнений (31), (33)—(36) заметно превышают значения $\mu_0 \approx 0.1 \div 0.2$, соответствующие максимальной кривизне кривых потемнения Грыгара [6] в моделях Михаласа [7].

На примере приближения (1), (3) мы показали, что для звезд $B1$ и особенно более ранних аппроксимирующая функция заметно сглаживает этот максимум кривизны. По-видимому, это и приводит к отмеченному ранее систематическому завышению потока в области горячих звезд. Можно предполагать, что ошибка в полном потоке излучения, которая возникнет при использовании только соотношения (9) к законам потемнения [6] звезд $B1$ и более ранних, будет также не меньшей. Следовательно, для этих звезд приближения законов их потемнения соотношениями вида (1) можно в основном считать менее точными, чем для более холодных звезд. Поэтому отыскание значений μ_0 из сошений (29) и (30) следует проводить численным интегрированием, непосредственно используя модельные значения $\frac{I(\mu_i)}{I(1)}$. Зная μ_0, легко определить значения u и v, поскольку соотношения (20), (21), (24), (27) и (28) линейны и разрешимы относительно u и v.

Рассмотрим еще один способ нахождения величин μ_0, u и v. Для его иллюстрации вновь воспользуемся значениями $\frac{I(\mu_i)}{I(1)}$ для звезды $B3$, приведенными в табл. 1 работы [4], с целью получить приближение этого распределения яркости двумя линейными законами. Рассмотрим задачу [(20, (21), (24))]. Вместо соотношений (20), (21) используем соответствующие им дискретные аналоги, которые, как и в [1], определяем из условия равенства нулю суммы взвешенных по μ_i уклонений аппроксимирующего распределения яркости (17), (19) от нелинейного закона $\frac{I(\mu_i)}{I(1)}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(1 - \frac{I(\mu_i)}{I(1)}\right) = u\left(\frac{1}{\mu_0}\sum_{i=1}^{k}\mu_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n}\mu_i - \sum_{i=1}^{n}\mu_i^2\right) + \frac{v}{\mu_0}\sum_{i=1}^{k}\mu_i(\mu_0 - \mu_i), \tag{37}$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} \mu_i \left(1 - \frac{I(\mu_i)}{I(1)}\right) = u \sum_{i=k+1}^{n} \mu_i (1 - \mu_i). \tag{38}$$

Здесь

$$\mu_k \leqslant \mu_0 \leqslant \mu_{k+1}. \tag{39}$$

Условие (39) делает неудобным непосредственное применение дискретного аналога соотношения (24)

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i^2 \left(1 - \frac{I(\mu_i)}{I(1)}\right) = v \sum_{i=1}^{k} \mu_i^2 \left(1 - \frac{\mu_i}{\mu_0}\right) - u \left(1 - \frac{1}{\mu_0}\right) \sum_{i=1}^{k} \mu_i^3, \tag{40}$$

который мы определяем как равенство нулю суммы взвешенных по μ_i^2 уклонений аппроксимирующего в области $[0;\ \mu_0]$ закона потемнения от нелинейного, $\frac{I(\mu_i)}{I(1)}$ (см. уравнение (23)). Поэтому мы поступали следующим образом. На сетке значений μ_0 решалась система соотношений (37), (38) для получения величин u и v. Искомое значение μ_0 выбиралось из условия минимизации суммы взвешенных по μ_i квадратов уклонений аппроксимирующего закона относительно нелинейного, $\frac{I(\mu_i)}{I(1)}$.

Это равносильно дискретизации соотношения (22). Получены следующие результаты:

$$\mu_{0B3} = 0.48 \pm 0.005, \quad u_{B3} = 0.307 \pm 0.005, \quad v_{B3} = 0.473 \pm 0.005. \tag{41}$$

По данным табл. 1 работы [4] для звезды $B3$ в работе [1] получено значение $u_{\text{п}} = 0.360 \pm 0.005$.

НЕКОТОРЫЕ ОЦЕНКИ ВЛИЯНИЯ НЕЛИНЕЙНОСТИ В ПОТЕМНЕНИИ К КРАЮ НА МОДЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ БЛЕСКА КЛАССИЧЕСКИХ ЗАТМЕННЫХ СИСТЕМ

В настоящей работе мы попытались оценить, так же как и авторы работ [4, 8, 9], влияние нелинейности в потемнении к краю на кривую блеска затменной двойной. Для этого выбрали случай центрального прохождения, когда в момент середины затмения диски звезд оказываются концентрическими. Очевидно, что в этот момент прохождения влияние нелинейности на кривую блеска будет наибольшим.

Рассмотрим закон потемнения [(17), (19), (41)] для звезды $B3$ и модель из [5] с $T = 30000$°K, $\lambda = 5500$ Å, для которой $A = 0.413$, $B = 0.642$, $u_{\text{п}} = 0.235$. В обоих случаях полный поток излучения от затмеваемой звезды находился из соотношения вида (6). В момент середины затмения значение потока излучения от затмеваемой звезды определяется интегрированием по μ от 0 до μ_1, где $\mu_1 = \sqrt{1 - k^2}$; $k < 1$ — отношение радиусов звезд, входящих в затменную двойную систему. Поток F_1 от кольцевой зоны затмеваемой звезды при линейном законе потемнения к краю определяется выражением

$$F_1 = I(1) \left\{ \frac{1 - u_{\text{п}}}{2} \mu_1^2 + \frac{u_{\text{п}}}{3} \mu_1^3 \right\}. \tag{42}$$

Соответствующий поток F_2 при законе потемнения (17), (19) находится по формуле

$$F_2 = I(1) \left\{ \frac{1 - v}{2} \mu_1^2 + \frac{v - u}{\mu_0} \cdot \frac{\mu_1^3}{3} + \frac{u \mu_1^3}{3} \right\};\ \mu_1 \leqslant \mu_0. \tag{43}$$

Для закона потемнения (1), (3)

$$F_2=I(1)\,\mu_1^2\left\{\frac{1-A}{2}+\frac{\mu_1}{3}\left(A+\frac{BM}{3}-B\lg\mu_1\right)\right\}. \qquad (44)$$

Пусть $F=\frac{3-u_п}{6}I(1)$ — полный поток излучения от затмеваемой звезды, aF — поток излучения от спутника. Для ряда значений a в табл. 1 и 2 приводятся потери блеска в момент середины кольцеобразного затмения: Δm_1 — для линейного закона потемнения с использованием усло-

Таблица 1

a	1/4	3/17	1/9	1/19	1/99	0
			$\mu_1=\mu_0,\ k=0.8773$			
Δm_1	$1^m.115$	$1^m.244$	$1^m.390$	$1^m.559$	$1^m.717$	$1^m.760$
Δm_2	1.127	1.258	1.408	1.581	1.743	1.788
Δ	0.012	0.014	0.018	0.022	0.026	0.028
			$\mu_1=\mu_2,\ k=0.9227$			
Δm_1	$1^m.311$	$1^m.483$	$1^m.688$	$1^m.940$	$2^m.195$	$2^m.269$
Δm_2	1.330	1.506	1.717	1.980	2.248	2.326
Δ	0.019	0.023	0.029	0.040	0.053	0.057
			$\mu_1=0.3122,\ k=0.95$			
Δm_1	$1^m.449$	$1^m.657$	$1^m.916$	$2^m.256$	$2^m.634$	$2^m.753$
Δm_2	1.468	1.682	1.949	2.304	2.706	2.835
Δ	0.019	0.025	0.033	0.048	0.072	0.082
			$\mu_1=0.2431,\ k=0.97$			
Δm_1	$1^m.561$	$1^m.804$	$2^m.118$	$2^m.561$	$3^m.121$	$3^m.322$
Δm_2	1.577	1.825	2.148	2.610	3.208	3.428
Δ	0.016	0.021	0.030	0.049	0.087	0.106
			$\mu_1=0.1411,\ k=0.99$			
Δm_1	$1^m.683$	$1^m.970$	$2^m.360$	$2^m.976$	$4^m.001$	$4^m.543$
Δm_2	1.691	1.981	2.377	3.008	4.087	4.689
Δ	0.008	0.011	0.017	0.032	0.086	0.146

вия (42) и Δm_2 — для нелинейного. Для отыскания значений Δm_2 в табл. 1 мы использовали соотношение (43), а в табл. 2 — соотношение (44). Значение μ_2 в табл. 1 и 2 определялось из условия максимальной разности потоков от затмеваемой звезды, даваемых линейным и нелинейным законами. Для задачи [(42), (43)] это соответствует выражению

$$1-u_п+u_п\mu_2=1-v+u\mu_2+\frac{\mu_2}{\mu_0}(v-u), \qquad (45)$$

из которого при условии (41) получаем $\mu_2=0.3854$. Соответствующее значение $k=0.9227$. Для задачи [(42), (44)] μ_2 определяется как корень уравнения

$$B\mu_2\lg\mu_2=(u_п-A)(1-\mu_2). \qquad (46)$$

Отсюда $\mu_2=0.4320$. Ему соответствует $k=\sqrt{1-\mu_2^2}=0.9018$.

Анализ данных табл. 1 и 2 обнаруживает в обоих случаях экстремум величины $\Delta=\Delta m_2-\Delta m_1$.

Для задачи [(42), (43)] максимум величины Δ определяется из выражения

$$2.5\frac{\partial}{\partial\mu_1}\left\{\lg\frac{aF+F_1}{aF+F_2}\right\}=0, \qquad (47)$$

Таблица 2

a	1	2/3	3/7	1/4	1/9	1/19	0
				$\mu_1=\mu_2,\ k=0.9018$			
Δm_1	$0^m.583$	$0^m.750$	$0^m.947$	$1^m.188$	$1^m.497$	$1^m.693$	$1^m.933$
Δm_2	0.589	0.759	0.959	1.205	1.523	1.726	1.976
Δ	0.006	0.009	0.012	0.017	0.026	0.033	0.043
				$\mu_1=0.3919,\ k=0.92$			
Δm_1	$0^m.612$	$0^m.791$	$1^m.005$	$1^m.271$	$1^m.625$	$1^m.857$	$2^m.152$
Δm_2	0.618	0.800	1.017	1.289	1.653	1.894	2.205
Δ	0.006	0.009	0.012	0.018	0.028	0.037	0.053
				$\mu_1=0.3122,\ k=0.95$			
Δm_1	$0^m.663$	$0^m.863$	$1^m.108$	$1^m.426$	$1^m.877$	$2^m.200$	$2^m.662$
Δm_2	0.669	0.871	1.121	1.445	1.909	2.246	2.737
Δ	0.006	0.008	0.013	0.019	0.032	0.046	0.075
				$\mu_1=0.2431,\ k=0.97$			
Δm_1	$0^m.698$	$0^m.914$	$1^m.184$	$1^m.544$	$2^m.087$	$2^m.512$	$3^m.221$
Δm_2	0.703	0.921	1.194	1.560	2.117	2.560	3.320
Δ	0.005	0.007	0.010	0.016	0.030	0.048	0.099
				$\mu_1=0.1411,\ k=0.99$			
Δm_1	$0^m.734$	$0^m.968$	$1^m.265$	$1^m.676$	$2^m.345$	$2^m.949$	$4^m.424$
Δm_2	0.737	0.971	1.270	1.685	2.364	2.983	4.574
Δ	0.003	0.003	0.005	0.009	0.019	0.034	0.150

где F_1 и F_2 определяются из соотношений (42) и (43). Это приводит к уравнению

$$\left\{u_{\text{п}}(1-v)-u(1-u_{\text{п}})-\frac{1-u_{\text{п}}}{\mu_0}(v-u)\right\}\mu_1^3+$$
$$+a(3-u_{\text{п}})\left(u_{\text{п}}-u-\frac{v-u}{\mu_0}\right)\mu_1+a(3-u_{\text{п}})(v-u_{\text{п}})=0. \qquad (48)$$

Поскольку $v>u_{\text{п}}>u$, дискриминант уравнения (48) отрицателен, и выражение (48) имеет единственный (для каждого $a>0$) действительный корень в области (0; 1) (см., например, [10]).

Для задачи [(42), (44)] максимум величины Δ определяется соотношением (47), в котором в качестве F_2 принимается выражение (44). Это приводит к уравнению

$$2BMu_{\text{п}}\mu_1^4+\{3(u_{\text{п}}-A)+2BM(1-u_{\text{п}})\}\mu_1^3+3a(3-u_{\text{п}})(u_{\text{п}}-A)\mu_1-$$
$$-3a(3-u_{\text{п}})(u_{\text{п}}-A)+3B(1-u_{\text{п}})\mu_1^3\lg\mu_1+$$
$$+3aB(3-u_{\text{п}})\mu_1\lg\mu_1=0. \qquad (49)$$

В зависимости от величины $a>0$ выражение (49) также имеет в области (0; 1) единственный действительный корень.

В табл. 3 и 4 для ряда значений a приведены величины μ_1 и соответствующие им значения $k=\sqrt{1-\mu_1^2}$, для которых при центральном прохождении реализуются приводимые там же максимальные значения величин Δ — для задач [(42), (43)] в табл. 3, для [(42), (44)] — в табл. 4.

Мы видим, что, хотя влияние нелинейности на кривые блеска в рассмотренных нами численных примерах задач [(42), (43)] и [(42), (44)] оказалось заметно большим, чем это следует, например из [9], тем не

Таблица 3

a	1/4	3/17	1/9	1/19	1/99
μ_1	0.3393	0.3270	0.3079	0.2740	0.1888
k	0.9407	0.9450	0.9514	0.9617	0.9822
Δm_1	$1^{m}.400$	$1^{m}.622$	$1^{m}.929$	$2^{m}.424$	$3^{m}.565$
Δm_2	1.419	1.647	1.962	2.474	3.657
Δ	0.019	0.025	0.033	0.050	0.092

Таблица 4

a	1	2/3	3/7	1/4	1/9	1/19
μ_1	0.3975	0.3850	0.3681	0.3429	0.2981	0.2539
k	0.9176	0.9229	0.9298	0.9394	0.9545	0.9672
Δm_1	$0^{m}.609$	$0^{m}.798$	$1^{m}.037$	$1^{m}.368$	$1^{m}.921$	$2^{m}.463$
Δm_2	0.615	0.807	1.050	1.387	1.953	2.511
Δ	0.006	0.009	0.013	0.019	0.032	0.048

менее для надежного выявления этого эффекта из наблюдений необходимо не только получение точных фотоэлектрических кривых ряда давно не наблюдавшихся разделенных классических систем, но и, возможно, заметное увеличение точности самих наблюдений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубашевский А. А. — В кн.: Астрометрия и астрофизика, 24. «Наукова думка», К., 1974, 88.
2. Рубашевский А. А. — В кн.: Астрометрия и астрофизика, 25. «Наукова думка», К., 1975, 27.
3. Van 't Veer F. — Rech. Astron. Obs. Utrecht, 1960, **14**, 3.
4. Киперман М. Е., Шульберг А. М. — Астрон. журн., 1969, **46**, 2, 412.
5. Klinglesmith D. A., Sobieski S. — Astron. J., 1970, **75**, 2, 175.
6. Grygar J. — BAC, 1965, **16**, 195.
7. Mihalas D. — Ap. J., 1965, Suppl., **9**, 92, 321.
8. Табачник В. М. — Астрон. журн., 1968, **45**, 6, 1207.
9. Шульберг А. М. — Астрон. журн., 1973, **50**, 5, 981.
10. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. ГИТТЛ, М., 1953, 257.

Киевский планетарий

Поступила в редколлегию
в мае 1974 г.