4. Мохнач Д. О. — ДАН СССР, 1958, **35**, 605.
5. Мохнач Д. О. — Астрон. журн., 1958, **120**, 1228.
6. Мохнач Д. О. — ДАН СССР, 1964, **157**, 309.
7. Шульман Л. М. — Астром. и астрофиз. «Наукова думка», К., 1969, **4**, 101.
8. Шульман Л. М. — Астрон. и астрофиз. «Наукова думка», К., 1969, 4, 117.
9. Bhathnagar L. I., Gross E. P., Krook M. A. — J. Fl. Mech., 1959, **92**, 111.
10. Finson M. L., Probstein R. F. — Publ. Fluid Mech. Lab., 1967, Nr. 67—4.
11. Hamel B. B., Willis D. R. — Phys. Fluids, 1966, **2**, 829.
12. Haser L. — Nature et origine des comètes, 1966 (Coll. int. d'astrophysique, Liege, 1965), Belgique, 1966, 223.

MOVEMENT OF NEUTRAL MATTER IN THE COMETARY ATMOSPHERE

L. M. SHULMAN

Summary

The article presents the lecture delivered at the summer school on the physics of comets (the Crimean Astrophysical Observatory, September, 1968).

Stratification of the cometary atmosphere founded on the dynamic properties of matter is discussed. The deduction is given of equations to describe neutral gas flow within the part of atmosphere where the collisions are infrequent but not negligible. Such equations may be useful to describe the movement in the inner part of the bright cometary heads.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ НЕЙТРАЛЬНОГО ВЕЩЕСТВА В АТМОСФЕРЕ КОМЕТЫ *

Л. М. Шульман

(ГАО АН УССР, г. Киев)

1. Распределение молекул по скоростям на границе области свободно-молекулярного разлета

В [2] приведен вывод уравнений, описывающих течение газа в переходной области от газодинамического к свободно-молекулярному режиму течения. Считая ПО областью стационарного течения, можно найти ход продольной и поперечной температур (см. [1]). Если течение газа стационарно, то, интегрируя уравнения (44) и (83), приведенные в [2], имеем

$$\varrho r^2 u = \varrho_0 r_я^3 u_0, \tag{1}$$

$$u^2 + 3RT_{\parallel} + 2RT_{\perp} = u_0^2 + 5RT_0 = 2H_0. \tag{2}$$

В последнем случае использовано граничное условие

$$T_{\parallel 0} = T_{\perp 0} = T_0. \tag{3}$$

Из уравнения (84), приведенного в [2], с учетом (1) получается

$$\frac{dT_{\perp}}{dr} + \frac{2T_{\perp}}{r} = \frac{u_0 r_я^2}{\tau_0 u^2 r^2} \left[\frac{T_{\parallel} + cT_{\perp}}{T_0 (1 + c)} \right]^{\beta} (T_{\parallel} - T_{\perp}), \tag{4}$$

а уравнение (82) из [2] преобразуется к виду

$$\frac{d}{dr} \left(u + \frac{RT_{\parallel}}{u} \right) - \frac{2RT_{\perp}}{ur} = 0. \tag{5}$$

---

* Лекция, прочитанная в летней школе по физике комет (Крымская АО, сентябрь 1968 г.).

Исключив из уравнения (88) с помощью (2), получим

$$\frac{dT_\perp}{dr} + \frac{2T_\perp}{r} = \frac{u_0 r_я^2 (T_\parallel - T_\perp)}{\tau_0 (2H_0 - 3RT_\parallel - 2RT_\perp) r^2} \left[\frac{T_\parallel + cT_\perp}{T_0 (1+c)} \right]^\beta, \tag{6}$$

Та же процедура применительно к уравнению (5) дает

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{3RT_\parallel}{2H_0 - 3RT_\parallel - 2RT_\perp}\right)\frac{dT_\parallel}{dr} + \\ + \left(1 - \frac{RT_\parallel}{2H_0 - 3RT_\parallel - 2RT_\perp}\right)\frac{dT_\perp}{dr} + \frac{2T_\perp}{r} = 0. \tag{7}$$

В ОЯО плотных кометных атмосфер выполнено условие

$$\frac{u_0 r_я^2}{r\tau_0 (2H_0 - 3RT_\parallel - 2RT_\perp)} \left[\frac{T_\parallel + cT_\perp}{(1+c) T_0} \right]^\beta = \varkappa \gg 1. \tag{8}$$

Поэтому из (6) следует:

$$T_\parallel - T_\perp = \frac{1}{\varkappa}\left(r\frac{dT_\perp}{dr} + 2T_\perp \right) \approx 0, \tag{9}$$

или

$$T_\parallel \sim T_\perp. \tag{10}$$

Кроме того, с приближением к внешней границе ОЯО

$$RT_\parallel \ll H_0. \tag{11}$$

Поэтому (7) вырождается в

$$\frac{dT}{dr} \cong -\frac{4}{3}\frac{T}{r}, \tag{12}$$

откуда следует:

$$T \infty^{-4/3}, \tag{13}$$

что согласуется с адиабатическим решением для ОЯО

$$T = T_0 \left(\frac{M_0^2}{M_0^2 + 3} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r_я}{r} \right)^{\frac{4}{3}} \tag{14}$$

Так как $\varkappa$ в (8)$\sim r^{-1}$, то очевидно, что на достаточно больших расстояниях неравенство (8) выполняться не будет и приближенное решение (10), (13) станет неверным. Учитывая, что неравенство (11) по мере удаления в ПО только усиливается, можно отбросить дроби в скобках первых двух членов уравнения (7) и рассматривать упрощенную систему:

$$\frac{1}{2}\frac{dT_\parallel}{dr} + \frac{dT_\perp}{dr} + \frac{2T_\perp}{r} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{dT_\perp}{dr} + \frac{2T_\perp}{r} = \frac{u_0 r_я^2 (T_\parallel - T_\perp)}{u_\infty^2 \tau_0 r^2} \left[\frac{T_\parallel + cT_\perp}{T_0 (1+c)} \right]^\beta \tag{16}$$

Здесь

$$u_\infty = u_0 \sqrt{1 + \frac{3}{M_0^2}} \approx \sqrt{2H_0} \tag{17}$$

— асимптотическое значение скорости течения на бесконечности.

Непосредственной подстановкой в (15) и (16) можно убедиться, что при

$$T_\parallel \longrightarrow T_\infty + \frac{2T_\infty r_\infty}{r}, \tag{18}$$

$$T_\perp \longrightarrow \frac{T_\infty r_\infty}{r}. \tag{19}$$

При этом (15) превращается в тождество, а (16) — в приближенное равенство, удовлетворяющееся тем точнее, чем больше r, если только связать константы r_∞ и T_∞ соотношением

$$r_\infty = \frac{u_0 r_я^2}{u_\infty^2 \tau_0 (1+c)\beta} \left(\frac{T_\infty}{T_0} \right)^\beta \tag{20}$$

Как видно из асимптотического решения (18), (19), поперечная температура стремится на бесконечности к определенному пределу, а продольная убывает обратно пропорционально расстоянию, т. е. несколько медленнее, чем убывает температура в ОЯО.

Точное значение T_∞ может быть получено путем численного интегрирования системы (6), (7), однако для оценки достаточно асимптотики (18), (19). Так как обе введенные константы связаны одним соотношением (20), то необходимо получить еще одно соотношение между ними. Нам известны обе асимптоты к кривой $T_\perp(r)$: прямая $T = T_\infty$ и гипербола (14). Можно полагать, что точка пересечения этих асимптот близка к точке (r_∞, T_∞). На этом основании

$$\frac{T_\infty}{T_0} \cong \left(\frac{M_0^2}{3 + M_0^2} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{r_я}{r_\infty} \right)^{\frac{4}{3}} \tag{21}$$

Решая совместно (20) и (21) относительно $\frac{r_\infty}{r_я}$ и $\frac{T_\infty}{T_0}$, имеем

$$\frac{T_\infty}{T_0} = \left(\frac{u_0 \tau_0}{r_я} \right)^{\frac{4}{4\beta+3}} (1+c)^{\frac{4\beta}{4\beta+3}} \left(1 + \frac{3}{M_0^2} \right)^{\frac{3}{4\beta+3}}, \tag{22}$$

$$\frac{r_\infty}{r_я} = \left(\frac{M_0^2}{M_0^2 + 3} \right)^{\frac{\beta+3}{4\beta+3}} (1+c)^{-\frac{3\beta}{4\beta+3}} \left(\frac{r_я}{u_0 \tau_0} \right)^{\frac{3}{4\beta+3}} \tag{23}$$

Заметим, что входящая в эти выражения величина

$$\frac{r_я}{u_0 \tau_0} \sim \frac{1}{Kn_0 M_0} \gg 1. \tag{24}$$

Следовательно, параметр r_∞ одного порядка с введенной $r_{ОЯО}$ в [2] границей ОЯО. Выражение (22) позволяет определить предельное число

Маха, которое достигается в потоке. Течение с анизотропной температурой характеризуется двумя числами Маха

$$M_{\parallel\infty}=\frac{u_\infty}{\sqrt{\frac{5}{3}RT_\infty}} \tag{25}$$

и

$$M_{\perp\infty}=\frac{u_\infty}{\sqrt{\frac{5}{3}R\frac{T_\infty}{T}r_\infty}}=M_{\parallel\infty}\sqrt{\frac{r}{r_\infty}}. \tag{26}$$

Из (25) с помощью (22) получаем

$$M_{\parallel\infty}=\left(\frac{r_{я}}{u_0\tau_0}\right)^{\frac{2}{4\beta+3}}M_0^{\frac{3}{4\beta+3}}\left(\frac{M_0^2+3}{1+c}\right)^{\frac{2\beta}{4\beta+3}} \tag{27}$$

Для максвелловских молекул $\beta=0$ и все соотношения значительно упрощаются, в частности

$$\frac{M_{\parallel\infty}}{M_0}=\left(\frac{r_{я}}{u_0\tau_0}\right)^{\frac{2}{3}}\gg 1, \tag{28}$$

т. е. число Маха в ПО значительно увеличивается по сравнению с начальным, а функция распределения, совпадающая с реальной, с точностью до третьих моментов, имеет вид

$$f=n\left(\frac{m}{2\pi kT_\parallel}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{m}{2\pi kT_\perp}e^{-\frac{m(v_r-u_\infty)^2}{2kT_\parallel}-\frac{m(v_\varphi^2+v_\Theta^2)}{2kT_\perp}}, \tag{29}$$

причем поперечная температура значительно меньше продольной.

2. Распределение плотности в переходной области

В пределах области сферической симметрии анизотропный характер температуры никак не влияет на распределение плотности вещества. Из (1) в приближениях (11), (17) следует:

$$\rho=\frac{\rho_0 r_{я}^2 u_0}{u_\infty r^2}. \tag{30}$$

Выше нигде не учитывалось разрушение молекул при фотохимических реакциях. В пределах ОЯО и ПО этот процесс может оказаться мало влияющим на динамику вещества. При фотопревращениях плотность вещества остается неизменной, изменяется лишь величина энтальпии торможения. Если фотохимические реакции не приводят к значительному высвобождению энергии или, другими словами, среди кометных нейтралов нет метастабильных молекул — фотохимические реакции внесут лишь незначительный вклад в энергетический баланс, который не имеет смысла учитывать в приближении (11).

С учетом сделанных оговорок можно пользоваться соотношением (29) для описания распределения плотности во всей области сферической симметрии.

Для сравнения теории с наблюдениями полная плотность вещества представляет гораздо меньший интерес, чем плотность определенного сорта светящихся молекул. Здесь роль разрушения светящихся частиц весьма существенна, и процессами диссоциации и ионизации пренебрегать нельзя.

При определении плотности светящихся молекул примем во внимание, что средний возраст t^* вещества, находящегося на расстоянии r от ядра, т. е. время, истекшее с момента испарения молекулы с поверхности ядра до момента наблюдения,

$$t^* = \frac{r}{u_\infty}.$$

Если среднее время жизни молекул данного сорта равно τ, то плотность их распределена в пространстве по закону

$$\rho = \rho_0 \frac{r_я^2 u_0}{r^2 u_\infty} e^{-\frac{r}{u_\infty \tau}} \tag{31}$$

3. Распределение плотности в свободномолекулярной области

Задача о распределении плотности в СМО решается интегрированием кинетического уравнения без столкновительного члена

$$\frac{df}{dt} + \mathbf{v} \cdot \frac{df}{d\mathbf{r}} + \mathbf{g} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = S(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) - \frac{f}{\tau_и}, \tag{32}$$

где S — функция источника, т. е. число частиц, появляющихся в единицу времени в единице шестимерного объема: β — величина, обратная среднему времени жизни частиц $\tau_и$. Рассматривая распределение частиц, вылетающих из ПО, а не продуктов их диссоциации, следует положить в (32) $S=0$ и интегрировать кинетическое уравнение с граничным условием: на поверхности

$$\mathbf{r}^2 = r_u^2 \tag{33}$$

функция распределения принимает вид

$$f = f_0(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}). \tag{34}$$

Выкладки упрощаются, если граничную задачу (32)—(34) заменить другой, ей эквивалентной, но с условием не на пространственной, а на временной границе. Удобнее всего отодвинуть эту границу в бесконечное прошлое. Тогда, очевидно, каким бы ни было начальное распределение молекул в пространстве, к моменту наблюдения эти молекулы исчезнут. Поэтому нет необходимости знать начальные данные для уравнения (32).

Если решать задачу с начальными условиями в бесконечном прошлом, то в момент наблюдения, выбранный за начало отсчета времени, функция распределения, удовлетворяющая уравнению (32) и произвольным начальным условиям, имеет вид

$$f(0, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \int_0^\infty e^{-\beta\tau} S\left(-\tau, \mathbf{r} - \mathbf{v}\tau + \frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}, \mathbf{v} - \mathbf{g}\tau\right) d\tau \tag{35}$$

Покажем, что эта функция является решением граничной задачи (32) — (34), если выбрать мощность источника в виде

$$S(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}) = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} f_0(\mathbf{r},\ \mathbf{v},\ t)\,\delta(\mathbf{r}^2 - r_и^2)\,\sigma(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}). \tag{36}$$

Входящая в это выражение δ-функция Дирака обеспечивает ненулевую мощность источника только на сфере радиуса $r_и$, σ — функция Хевисайда ($\sigma(x)=0$ при $x<0$, $\sigma(x)=1$ при $x\geqslant 0$) отфильтровывает поток молекул, идущих наружу.

При подстановке (36) в (35)

$$f(0,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}) = 2\int\limits_0^\infty e^{-\beta\tau}(\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau)\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right) f(\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau)\times$$

$$\times\delta\left[\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right)^2 - r_u^2\right]\sigma\left[(\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau)\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right)\right]d\tau. \tag{37}$$

Для доказательства эквивалентности проинтегрируем по возрастам частиц τ. Для этого необходимо представить δ-функцию в виде

$$\delta\left[\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right)^2 - r_u^2\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\frac{\delta(\tau-\tau_i)}{2\left|\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau_i+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right)\cdot(\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau)\right|}, \tag{38}$$

где τ_i — корни уравнения

$$\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right)^2 - r_u^2 = 0. \tag{39}$$

Вклад в интеграл (37) дадут только вещественные корни этого уравнения. Если отвлечься от вырожденного случая, когда частица испускается по касательной к поверхности источника, то уравнение (39) имеет два или четыре вещественных корня. Это, очевидно, связано с тем, что траектория молекулы (парабола в приближении $\mathbf{g}=\mathrm{const}$) пересекает поверхность источника в двух либо в четырех точках. Половину этого количества составляют точки, в которых молекула входит в источник, соответствующие им корни (39) не дают вклада в интеграл (37). Таким образом, в сумме (64) остается не более двух существенных членов. Из физических соображений ясно, что частица с большим из двух τ_i возрастом может прийти в точку $(\mathbf{r}, \mathbf{v})$, только пройдя сквозь источник, что лишено физического смысла. Поэтому вклад в интеграл дает только один член суммы (38) с наименьшим корнем уравнения (39). Выполняя интегрирование, получим соотношение

$$f(0,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}) = e^{-\beta\tau_{мин}(\mathbf{v})} f_0\left(\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau_{мин},\ \ \mathbf{r}-\mathbf{v}\tau_{мин}+\frac{\mathbf{g}\tau_{мин}^2}{2},\ \ -\tau_{мин}\right), \tag{40}$$

которое вместе с (39) дает решение поставленной задачи. Очевидно, что при $r=r_u$

$$\tau_{мин}=0$$

и (40) обращается в тождество, чем наше утверждение доказано.

Заметим, что в небольшой области кометной атмосферы физический смысл имеют два корня уравнения (39). Этот случай относится к частицам, которые, вылетев из источника в направлении Солнца, снова возвращаются в источник, совершая таким образом финитное движение. Это может привести к накоплению частиц в виде узкого купола, опирающегося на ПО и образующего аномальный хвост. Этот эффект, исчезающий в приближении точечного источника, требует учета нестационарности, столкновений и орбитального движения кометы и должен рассматриваться отдельно.

Для получения объемной плотности частиц необходимо проинтегрировать функцию распределения по пространству скоростей

$$n(\mathbf{r}) = \int e^{-\beta\tau_{\text{мин}}(\mathbf{v})} f_0(\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau)\, d^3\mathbf{v}. \tag{41}$$

В такой форме интегрирование по скоростям затруднительно, так как явное выражение $\tau_{\text{мин}}=\tau_{\text{мин}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, \mathbf{g}, r_{\text{и}})$ весьма громоздко. Удобнее поступить иначе. Обратимся к решению кинетического уравнения в форме (37) и проинтегрируем его по скоростям:

$$n(\mathbf{r}) = 2\int d^3\mathbf{v} \int e^{-\beta\tau} (\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau)\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right) f(\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau)\times$$

$$\times\delta\left[\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right)^2 - r_u^2\right]\sigma\left[(\mathbf{v}-\mathbf{g}\tau)\cdot\left(\mathbf{r}-\mathbf{v}\tau+\frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right)\right]d\tau. \tag{42}$$

Изменим в этом выражении порядок интегрирования и конкретизируем систему координат:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \{x, y, z\}, \\ \mathbf{v} &= \{v_x, v_y, v_z\}, \\ \mathbf{g} &= \{g, 0, 0\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Получим

$$n(x, y, z) = 2\int_0^\infty e^{-\beta\tau} d\tau \int f\left(v_x - g\tau,\ v_y,\ v_z,\ x - v_x\tau + \frac{g\tau^2}{2},\ y - v_y\tau,\ z - v_z\tau\right)\times$$

$$\times\left[(v_x - g\tau)\left(x - v_x\tau + \frac{g\tau^2}{2}\right) + v_y(y - v_y\tau) + v_z(z - v_z\tau)\right]\times$$

$$\times\sigma\left[(v_x - g\tau)\left(x - v_x\tau + \frac{g\tau^2}{2}\right) + v_y(y - v_y\tau) + v_z(z - v_z\tau)\right]\times$$

$$\times\delta\left[\left(x - v_x\tau + \frac{g\tau^2}{2}\right)^2 + (y - v_y\tau)^2 + (z - v_z\tau)^2\right] dv_x dv_y dv_z. \tag{44}$$

Для выполнения интегрирования по v_x решаем относительно v_x уравнение

$$\left(x - v_x\tau + \frac{g\tau^2}{2}\right)^2 = r_u^2 - (y - v_y\tau)^2 - (z - v_z\tau)^2. \tag{45}$$

Имеем

$$v_{x_{1,2}} = \frac{1}{\tau}\left[x + \frac{g\tau^2}{2} \mp \sqrt{r_u^2 - (y - v_y\tau)^2 - (z - v_z\tau)^2}\right]. \tag{46}$$

Два знака перед радикалом соответствуют тому, что точки $(\mathbf{r}, v_y, v_z)$ достигают две группы молекул, имеющих один и тот же возраст: одна — испущенная из фронтальной, другая — из тыльной части источника. Нетрудно сообразить, что величина радикала в (46) — это половина длины хорды, проведенной через источник в точке вылета частицы параллельно оси x. Оба значения скорости различаются на величину, которая необходима для пролета хорды за время, равное возрасту. Если обе частицы имеют достаточную составляющую поперечной скорости $\sqrt{v_y+v_z^2}$, то они обе, не пересекая источник, прийдут в рассматриваемую точку фазового пространства. В этом случае оба корня (46) имеют физический смысл. Поэтому можно написать

$$\delta\,(r_0^2-r_u^2)=$$

$$=\frac{\delta\left\{v_x-\dfrac{1}{\tau}\left[x+\dfrac{g\tau^2}{2}+\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right]\right\}}{2\tau\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}}+$$

$$+\frac{\delta\left\{v_x-\dfrac{1}{\tau}\left[x+\dfrac{g\tau^2}{2}-\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right]\right\}}{2\tau\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}} \qquad (47)$$

и выполнить интегрирование по v_x.

Получается

$$n\,(x,\,y,\,z)=\int\limits_0^\infty\frac{e^{-\beta\tau}}{\tau}\,d\tau\iint\left\{f_0\left[\frac{1}{\tau}\left(x-\frac{g\tau^2}{2}+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2+(z-v_z\tau)^2}\right),\ v_y,\ v_z,\ -\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2},$$

$$\left.y-v_y\tau,\ z-v_z\tau\right]\left[-\frac{1}{\tau}\left(x-\frac{g\tau^2}{2}+\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}+v_y\,(y-v_y\tau)+v_z\,(z-v_z\tau)\right]\times$$

$$\times\sigma\left\{-\frac{1}{\tau}\left(x-\frac{g\tau^2}{2}+\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}+v_y\,(y-v_y\tau)+v_z\,(z-v_z\tau)\right\}+$$

$$+f_0\left[\frac{1}{\tau}\left(x-\frac{g\tau^2}{2}-\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2+(z-v_z\tau)^2}\right),\ v_y,\ v_z,\right.$$

$$\left.\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2},\ y-v_y\tau,\ z-v_z\tau\right]\left[\frac{1}{\tau}\left(x-\frac{g\tau^2}{2}-\right.\right.$$

$$\left.-\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right)\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}+$$

$$\left.+v_y\,(y-v_y\tau)+v_z\,(z-v_z\tau)\right]\sigma\left\{\frac{1}{\tau}\left(x-\frac{g\tau^2}{2}-\right.\right.$$

$$- \sqrt{r_u^2 - (y - v_y\tau)^2 - (z - v_z\tau)^2}\Big) \sqrt{r_u^2 - (y - v_y\tau)^2 - (z - v_z\tau)^2 +}$$

$$+ v_y (y - v_y\tau) + v_z (z - v_z\tau)\Big\}\Big\} \frac{dv_y dv_z}{\sqrt{r_u^2 - (y - v_y\tau)^2 - (z - v_z\tau)^2}}. \quad (48)$$

Заметим, что x в это выражение входит только в комбинации $x - \frac{g\tau^2}{2}$. Поэтому можно было сначала решать задачу при $g=0$, а затем заменить в конечном результате x на $x - \frac{g\tau^2}{2}$. При $g = \mathrm{const}$ распределение плотности можно представить в виде

$$n(\mathbf{r}) = \int_0^\infty G\left(\tau, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{g}\tau^2}{2}\right) d\tau, \quad (49)$$

где $G(t, r)$ — функция Грина, описывающая пространственно-временное поведение плотности в элементарном облаке частиц, которое образовано мгновенным неподвижным источником, действовавшим в момент $t=0$ в начале координат.

Если пренебречь различием ускорений в пределах элементарного облака, то можно получить приближенное решение, учитывающее орбитальное движение кометы и переменность $\mathbf{g}$. Так как $g \sim R^{-2}$, то относительное различие ускорений в пределах облака

$$\varepsilon = \frac{g - g_ц}{g_ц} \approx \frac{l}{R}, \quad (50)$$

где l — диаметр облака, R — геоцентрическое расстояние кометы. Величина ε мажорирует относительную погрешность приближения, которая при $R \sim 10^{13}$ *см*, $l \sim 10^{11}$ *см* не превышает 1%.

По физическому смыслу отброшенная часть ускорения есть ускорение приливной силы. Мы фактически приняли, что элементарное облако все время сохраняет сферическую форму. В действительности облако слегка сплюснуто в направлении ускорения. В данном случае движение происходит в поле отталкивательных сил, поэтому результат приливного взаимодействия — отливы на фронтальной и тыльной частях облака. Однако, как показывает приведенная оценка, сплюснутость невелика, и ею можно пренебречь.

Если центр тяжести элементарного облака описывает в пространстве кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(t), \quad (51)$$

то в бесприливном приближении распределение плотности описывается выражением

$$n(\mathbf{r}) = \int_0^\infty G(\tau, \mathbf{r} - \mathbf{R}(\tau))\, d\tau. \quad (52)$$

Здесь функция Грина для протяженного, но сферически симметричного источника имеет вид

$$G(\tau, x, y, z) = \frac{e^{-\beta\tau}}{\tau} \times$$

$$\times\left\{\iint f_0\left[\frac{1}{\tau}\left[x+\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2},\ v_y,\ v_z,\right.\right.\right.$$

$$\left.-\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2},\ y-v_y\tau,\ z-v_z\tau\right]\times$$

$$\times\left[-\frac{1}{\tau}\left(x+\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right)\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}+\right.$$

$$\left.+v_y(y-v_y\tau)+v_z(z-v_z\tau)\right]dv_ydv_z+$$

$$+\iint f_0\left[\frac{1}{\tau}\left(x-\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2},\ v_y,\ v_z,\right.\right.$$

$$\left.\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2},\ y-v_y\tau,\ z-v_z\tau\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\tau}\left(x-\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right)\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+v_y(y-v_y\tau)+v_z(z-v_z\tau)\right]dv_ydv_z\right\}, \qquad (53)$$

где области интегрирования в первом и втором интегралах соответственно ограничены системами неравенств:

$$\begin{cases} r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2\geqslant 0, \\ -\left(x+\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right)\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}+ \\ \qquad +v_y\tau(y-v_y\tau)+v_z\tau(z-v_z\tau)\geqslant 0, \end{cases} \qquad (54)$$

$$\begin{cases} r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2\geqslant 0, \\ \left(x-\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}\right)\sqrt{r_u^2-(y-v_y\tau)^2-(z-v_z\tau)^2}+ \\ \qquad +v_y\tau(y-v_y\tau)+v_z\tau(z-v_z\tau)\geqslant 0. \end{cases} \qquad (55)$$

Результат тривиально обобщается на случай несимметричного источника.

4. Переход к приближению точечного источника

Для изучения распределения плотности в большей части кометной атмосферы нет необходимости пользоваться выражением (53), учитывающим конечные размеры источника. На расстояниях, значительно превосходящих размеры источника, можно считать источник точкой.

По определению

$$S=\operatorname{div}(\mathbf{v}f)=\lim_{\substack{A\to 0\\ V\to 0}}\frac{\oint\limits_A f_0(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v})\ \mathbf{v}\cdot d\mathbf{A}}{V}, \qquad (56)$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности A, охватывающей точку г. Если в качестве избранной точки взять центр ядра, подставить в (56) объем источника, интегрировать в числителе (56) по полусфере радиуса r_u и отказаться от предельного перехода, то тем самым мы усредним источник по объему ПО.

Так как из-за сферической симметрии усредненная мощность источника не зависит от направления скорости, то для упрощения выкладок выберем систему координат в виде

$$\mathbf{r}=\{r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\sin\vartheta\cos\varphi\} \tag{57}$$

$$\mathbf{v}=\{v,0,0\}. \tag{59}$$

В этой системе

$$\bar{S}=\frac{3}{2r_{и}}\int\limits_0^{\pi/2} f_0(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v})\, v\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta. \tag{59}$$

В приближении Виллиса и Хеймела [3] функция распределения на границе ПО имеет вид

$$f_0=\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2}\frac{n}{T_\perp\sqrt{T_\parallel}}\,e^{-\frac{m\left(\frac{\mathbf{v}\,\mathbf{r}}{r}-u\right)^2}{2kT_\parallel}-\frac{m\left(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r}\right)}{2kT_\perp}} \tag{60}$$

Подставив это выражение в (59), получим с учетом (57) и (58)

$$\bar{S}=\frac{3n\,(r_{и})}{2r_{и}}\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2}\frac{v}{T_\perp\sqrt{T_\parallel}}\int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{m\,(v\cos\vartheta-u)^2}{2kT_\parallel}-\frac{mv^2\sin^2\vartheta}{2kT_\perp}}\times$$

$$\times\sin\vartheta\cos\vartheta d\vartheta. \tag{61}$$

Представляет интерес предельный случай $T_\perp\to 0$, когда

$$\frac{mv\sin\vartheta}{2\pi kT_\perp}\,e^{-\frac{mv^2\sin^2\vartheta}{2kT_\perp}}\longrightarrow\frac{\delta\,(v\sin\vartheta)}{2\pi}=\frac{\delta\,(\vartheta)}{2\pi v} \tag{62}$$

и функция принимает вид

$$\bar{S}=\frac{3n\,(r_{и})}{2r_{и}}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT_\parallel}}\,e^{-\frac{m\,(v-u)^2}{2kT_\parallel}} \tag{63}$$

При произвольных $T_\parallel$, $T_\perp$

$$\bar{S}=\frac{3n_{и}}{2r_{и}}\left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2}\frac{v}{T_\perp\sqrt{T_\parallel}}\,e^{-\frac{mu^2}{2kT_\parallel}-\frac{mv^2}{2kT_\perp}}\times$$

$$\times\left\{\frac{kT_\parallel T_\perp}{mv^2\,(T_\parallel-T_\perp)}\left[e^{-\frac{mv}{kT_\parallel}\left(v\frac{T_\parallel-T_\perp}{2kT_\perp}+u\right)}-1\right]-\right.$$

$$-\frac{uT_\perp}{v^2\,(T_\parallel-T_\perp)}\sqrt{\frac{kT_\parallel T_\perp}{2m\,(T_\parallel-T_\perp)}}\left[\Phi\left(v\sqrt{\frac{m\,(T_\parallel-T_\perp)}{2kT_\parallel T_\perp}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{mu}{kT_\parallel}\sqrt{\frac{kT_\parallel T_\perp}{2m\,(T_\parallel-T_\perp)}}\right)-\Phi\left(\frac{mu}{kT_\parallel}\sqrt{\frac{kT_\parallel T_\perp}{2m\,(T_\parallel-T_\perp)}}\right)\right]\right\}, \tag{64}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{65}$$

— функция ошибок.

Переход к точечному источнику означает, что все траектории, описываемые средним источником (59), мы считаем выходящими из одной точки — центра ядра кометы. Формально процедура перехода к точечному источнику состоит в том, чтобы умножить (59), или (64), или (63) на величину

$$\frac{4}{3} \pi r_{н}^{3} \delta(\mathbf{r}). \tag{66}$$

Трехмерная δ-функция позволяет просто выполнить интегрирование по скоростям и получить функцию Грина в виде

$$G(\tau, r) = \frac{2\pi n r_{н}^{2}}{\tau^2 r} \left(\frac{m}{2\pi k}\right)^{3/2} e^{-\frac{mu^2}{2kT_{\parallel}} - \frac{mr^2}{2kT_{\perp}\tau^2}} \times$$

$$\times \left\{ \frac{k\sqrt{T_{\parallel}}}{m(T_{\parallel} - T_{\perp})} \left[e^{-\frac{mr}{kT_{\parallel}\tau}\left(\frac{r}{\tau} \cdot \frac{T_{\parallel} - T_{\perp}}{2T_{\perp}} + u\right)} - 1 \right] - \right.$$

$$- \frac{u}{(T_{\parallel} - T_{\perp})} \sqrt{\frac{kT_{\perp}}{2m(T_{\parallel} - T_{\perp})}} \left[\Phi\left(\frac{r}{\tau}\sqrt{\frac{m(T_{\parallel} - T_{\perp})}{2kT_{\parallel}T_{\perp}}} + \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{mu}{kT_{\parallel}}\sqrt{\frac{kT_{\parallel}T_{\perp}}{2m(T_{\parallel} - T_{\perp})}}\right) - \Phi\left(\frac{mu}{kT_{\parallel}}\sqrt{\frac{kT_{\parallel}T_{\perp}}{2m(T_{\parallel} - T_{\perp})}}\right)\right]\right\} e^{-\beta\tau}, \tag{67}$$

что совместно с (52) дает распределение плотности нейтральной компоненты в большей части кометной атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнедин Ю. Н., Долгинов А. З. — АЖ, 43, 181, 1966.
2. Шульман Л. М. — См. наст. сб.
3. Hamel B. B., Willis D. R. — Phys. Fluids, 2, 829, 1966.

DENSITY DISTRIBUTION OF THE NEUTRAL MATTER IN THE COMETARY ATMOSPHERE

L. M. SHULMAN

Summary

The neutral matter density distribution in the cometary atmosphere are obtained in both the transition region from the hydrodynamical to free-molecular regime and the free-molecular region.

In the last case both anisothropy and asymmetry of the initial velocity distribution are taken into account derived from an approximate solution of problem on matter flow in the transition-region.