ДВИЖЕНИЕ НЕЙТРАЛЬНОГО ВЕЩЕСТВА В АТМОСФЕРЕ КОМЕТЫ *

Л. М. Шульман

(ГАО АН УССР, г. Киев)

Для интерпретации результатов поверхностной фотометрии снимков комет, полученных с фильтрами, пропускающими эмиссионные полосы нейтральных молекул (CH, C_2, CN и др.), необходимо знать зависимость распределения поверхностной яркости от физических параметров кометы. Распределение поверхностной яркости I получается интегрированием распределения плотности n вдоль луча зрения (ось z):

$$I = \mathrm{const} \int n dz. \tag{1}$$

Объемная плотность вещества определяется его динамикой. В работах [2—6, 12], посвященных расчету распределения плотности, везде принималось, что во всей атмосфере кометы осуществляется бесстолкновительное движение молекул. Это предположение заведомо несправедливо для ярких комет из-за существования у них области, где столкновения существенны. В работе [2], где проведен наиболее полный анализ бесстолкновительного движения кометных молекул и продуктов их распада, предполагалось, что начальное распределение скоростей можно взять в виде

$$S_0 \sim e^{-mv^2/2kT},$$

т. е. рассматривать ядро кометы как сферически симметричный точечный источник. Это предположение не оправдано для ярких комет, потому что на тепловое движение молекул у ядра накладывается регулярное газодинамическое течение с некоторой радиальной скоростью. Для слабых комет данное предположение также не выполняется, так как истечение здесь не является сферически симметричным.

Сферическую симметрию истечения вещества нельзя оправдать быстрым вращением ядра, как это делают Финсон и Пробстейн [10], так как с ростом скорости вращения распределение температуры стремится не к сферически, а к цилиндрически симметричному. Вращение, очевидно, способно сгладить только суточные (имеются в виду кометные «сутки») колебания температуры на поверхности ядра, но не оказывает никакого влияния на «годичные» колебания.

В общем случае распределение температуры несимметрично относительно плоскости кометной орбиты. Температура максимальна в «тропическом поясе» кометного ядра и в «летнем» полушарии выше, чем в «зимнем». В разреженных атмосферах слабых комет температурный перепад не может выравниваться за счет конвективного переноса тепла в атмосфере, а теплопроводность самого ядра незначительна.

В настоящей работе рассмотрено движение нейтрального вещества в атмосфере ярких комет, когда в результате значительной плотности вещества в окрестности ядра источник вещества можно считать сферически симметричным. Однако столкновениями между молекулами пренебрегать нельзя, и течение последовательно проходит все стадии — от газодинамического до свободномолекулярного режима.

---

* Лекция, прочитанная в Летней школе по физике комет (Крымская АО, сентябрь 1968 г.).

Стратификация кометной атмосферы

Традиционное разделение атмосферы на голову и хвост непосредственно не связано с физическими условиями в атмосфере и опирается скорее на оптические, чем на динамические характеристики вещества. Течение газа существенно зависит от того, как изменяются параметры потока на протяжении длины свободного пробега молекулы. Поэтому целесообразно ввести иную стратификацию, выбрав в качестве определяющего параметра локальное число Кнудсена, т. е. отношение длины свободного пробега λ к характерному масштабу течения L:

$$\mathrm{Kn} = \frac{\lambda}{L}. \tag{2}$$

В соответствии с этим критерием кометную атмосферу можно разделить на следующие зоны: пристеночный слой (ПС), околоядерную область (ОЯО), переходную область (ПО) и область свободномолекулярного течения (СМО).

Течение в пристеночном слое [8] контролируется процессами испарения и конденсации на поверхности ядра. В ПС происходит установление начального локально-максвелловского распределения молекул по скоростям. Так как релаксационная длина одного порядка с длиной свободного пробега, то в ПС всегда $\mathrm{Kn} \sim 1$. Толщина пристеночного слоя

$$\Delta \sim (\sigma n_0)^{-1}. \tag{3}$$

Газокинетическое сечение σ молекул NH_3 составляет $4.8 \cdot 10^{-16}$ *см*^{2}, молекул C_2H_2 и C_2H_4 — $1.1 \cdot 10^{-15}$ *см*^{2}. При этих значениях σ в диапазоне начальных плотностей 10^{16}—10^{10} частиц/*см*^{3} соответственно получаем $\Delta \sim 0.1$ *см* — 1 *км*. Во многих случаях Δ значительно меньше радиуса ядра кометы $r_я$, что дает право рассматривать пристеночный слой как плоский.

Вне пристеночного слоя считаем характерным масштабом течения величину

$$L = n/\nabla n,$$

т. е. расстояние, на котором существенно изменяется плотность частиц n. Для оценки можно принять $n_0 \approx n r_я^2 r^{-2}$, что дает

$$\mathrm{Kn} = \frac{2r}{\sigma n_0 r_я^2}. \tag{4}$$

Под околоядерной областью подразумеваем часть атмосферы, выделенную условием $\mathrm{Kn} \ll 1$. Полагая для определенности $\mathrm{Kn} = 0.1$ на внешней границе ОЯО, получим оценку ее радиуса

$$r_{ОЯО} \sim 0.05 \sigma n_0 r_я^2. \tag{5}$$

В ОЯО движение газа хорошо описывается уравнениями газодинамики без диссипативных членов [7].

Область свободномолекулярного течения определена условием $\mathrm{Kn} \gg 1$. Если принять в качестве условной границы СМО слой, где $\mathrm{Kn} = 10$, то получим оценку внутреннего радиуса СМО:

$$r_{СМО} \sim 5 \sigma n_0 r_я^2. \tag{6}$$

В СМО течение вещества хорошо описывается кинетическим уравнением без столкновительного члена, которое легко интегрируется.

Наиболее трудно найти адекватное описание динамики вещества в переходной области, где Kn$\sim$1, т. е. при

$$r_{ОЯО} < r < r_{СМО}.$$

Условные границы ОЯО и СМО при различных $r_я$, n_0 и $\sigma = 10^{-15}$ *см*^{2} представлены в таблице. Из таблицы видно, что размеры ОЯО, как правило, весьма малы. Это означает, что при изучении распределения вещества в голове кометы ядро вместе с ОЯО может рассматриваться как точечный источник вещества.

$r_я$, *км*	$n_я$, *см*$^{-3}$	λ_0, *см*	Kn=0.1	Kn=10
			$r_{ОЯО}$, *км*	$r_{СМО}$, *км*
10	10^{13}	10^2	5000	500 000
5	10^{13}	10^2	1250	125 000
1	10^{13}	10^2	50	5 000
10	10^{12}	10^3	500	50 000
5	10^{12}	10^3	125	12 500
1	10^{12}	10^3	5	500

Нетрудно установить критерий, при выполнении которого ОЯО может рассматриваться как сферически симметричный источник. Очевидно, что область сферической симметрии (ОСС) определяется неравенством

$$r_{ОСС} \ll \frac{v^2}{2g}, \tag{7}$$

где v — скорость течения газа, g — ускорение в поле солнечной гравитации и лучевого давления. Для оценки, учитывая, что для нейтральных молекул $1+\mu\sim 1$, можно положить

$$g = \frac{GM_{\odot}}{R^2_{\bigcirc\!\equiv}},$$

где $R_{\bigcirc\!\equiv}$ — гелиоцентрическое расстояние кометы, $M_{\odot}$ — масса Солнца. Обычно $R_{\bigcirc\!\equiv}\sim 10^{12}$—$10^{14}$ *см*, $v\sim 10^4$—10^5 *см/сек*. При этом величина

$$r_{ОСС} = 0.1\,\frac{v^2 R_{\bigcirc\!\equiv}}{2GM_{\odot}} \approx 5\cdot 01^{-28} v^2 R^2_{\bigcirc\!\equiv} \tag{8}$$

изменяется в широких пределах: 5 *км* $< r_{ОСС} <$ 500 000 *км*. На расстоянии $\sim$1 *а. е.* при $v\sim 10^5$ *см/сек* сферическая симметрия имеет место в радиусе $r_{ОСС}\sim 10^4$ *км*, а существенное нарушение сферичности начнется лишь на расстояниях $r\sim 10^5$ *км* от ядра. Следовательно, во многих случаях можно рассматривать течение нейтрального вещества как сферически симметричное. Кроме того, приближение сферически симметричного источника всегда справедливо при изучении структуры хвоста, так как $r_{ОСС}$ всегда меньше его размеров.

Вывод основных уравнений

Течение газа в пристеночном слое и околоядерной области подробно рассмотрено в работах [7, 8]. В этом разделе приведем вывод уравнений течения в наиболее трудной для исследования переходной области, характеризующейся условием Kn$\sim$1. С учетом оговорок, сделанных в предыдущем разделе, рассмотрим сферически симметричное течение. Кроме того, для простоты ограничимся случаем однокомпонентного газа, так как основной целью нашей является изучение закономерности перехода от континуального режима в ОЯО к свободномолекулярному течению. Фундаментальный результат в этом направлении получен Хеймелом и Виллисом [11].

Произвольное течение газа описывается кинетическим уравнением, которое в сферических координатах имеет вид [1]

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_r\frac{\partial f}{\partial r}+\frac{v_\theta^2+v_\varphi^2}{r}\frac{\partial f}{\partial v_r}+\left(\frac{v_\varphi^2}{r}\operatorname{ctg}\Theta-\frac{v_r v_\theta}{r}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial f}{\partial v_\theta}-\left(\frac{v_r}{r}+\frac{v_\theta}{r}\operatorname{ctg}\Theta\right)v_\varphi\frac{\partial f}{\partial v_\theta}=St, \qquad (9)$$

где v_r, v_φ, v_θ — составляющие скорости молекулы, $f(r, v_r, v_\varphi, v_\theta)$ — функция распределения молекул в фазовом пространстве, St — член, описывающий эффект межмолекулярных столкновений.

Решение кинетического уравнения упрощается, если вместо точного выражения для столкновительного члена пользоваться модельным выражением, предложенным Бхатнагаром, Гроссом и Круком [9]:

$$St=\langle\sigma v\rangle(n^2F_0-nf), \qquad (10)$$

где, по определению,

$$n=\int fd^3\mathbf{v}, \qquad (11)$$

$$F_0=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m(\mathbf{v}-\mathbf{k})^2}{2kT}},$$

$$\mathbf{u}=\int\mathbf{v}fd^3\mathbf{v}, \qquad (13)$$

$\langle\sigma v\rangle$ — коэффициент скорости релаксации. Для максвелловских молекул столкновительный член (10) точный; при этом $\langle\sigma v\rangle$ не зависит от скорости движения молекул (от температуры).

Одним из способов решения уравнения (9) является метод моментов. В дальнейшем рассматриваются следующие моменты и связанные с ними величины:
плотность вещества

$$\varrho=m\int fdv_rdv_\varphi dv_\theta, \qquad (14)$$

плотность импульса (плотность потока вещества)

$$\varrho u=m\int v_rfdv_rdv_\varphi dv_\theta, \qquad (15)$$

плотность потока радиальной составляющей импульса в радикальном направлении

$$P_{rr}+\varrho u^2=m\int v_r^2 fdv_rdv_\varphi dv_\theta, \qquad (16)$$

где P_{rr} — радиальное давление, u — радиальная скорость течения;

поперечные давления

$$P_{\varphi\varphi}=m\int v_\varphi^2\, f dv_r dv_\varphi dv_\theta, \tag{17}$$

$$P_{\theta\theta}=m\int v_\theta^2\, f dv_r dv_\varphi dv_\theta, \tag{18}$$

удвоенная плотность потока энергии, приходящаяся на радиальное движение молекул

$$2Q_{rrr}+3uP_{rr}+\varrho u^3=m\int v_r^3\, f dv_r dv_\varphi dv_\theta, \tag{19}$$

в которую входит поток тепла, обусловленный радиальной составляющей тепловой скорости, — Q_{rrr}, конвективный поток (второй член слева) и поток кинетической энергии макроскопического движения (третий член в левой части); удвоенная плотность потока энергии, приходящаяся на азимутальное движение молекул

$$uP_{\varphi\varphi}+2Q_{r\varphi\varphi}=m\int v_r v_\varphi^2\, f dv_r dv_\varphi dv_\theta \tag{20}$$

и аналогичная величина для меридиональной степени свободы

$$uP_{\theta\theta}+2Q_{r\theta\theta}=m\int v_r v_\theta^2\, f dv_r dv_\varphi dv_\theta. \tag{21}$$

В уравнения (20) и (21) вошли потоки тепла, обусловленные трансверсальным движением, но направленные по радиусу. Вследствие симметрии следующие моменты равны нулю:

$$\int v_\varphi f dv_r dv_\varphi dv_\theta=0, \tag{22}$$

$$\int v_\theta f dv_r dv_\varphi dv_\theta=0, \tag{23}$$

$$\int v_r v_\varphi f dv_r dv_\varphi dv_\theta=0, \tag{24}$$

$$\int v_r v_\theta f dv_r dv_\varphi dv_\theta=0, \tag{25}$$

$$\int v_\varphi v_\theta f dv_r dv_\varphi dv_\theta=0. \tag{26}$$

Равны нулю также остальные моменты третьего порядка, не вошедшие в соотношения (19)—(21).

Умножим кинетическое уравнение (9) соответственно на m, v_θ, mv_r, $mv_r v_\theta$, mv_r^2, mv_φ^2 и mv_θ^2 и проинтегрируем по пространству скоростей с учетом того, что при столкновениях сохраняются число частиц, импульс и энергия, т. е.

$$\int S t dv_r dv_\varphi dv_\theta=\int \mathbf{v} S t dv_r dv_\varphi dv_\theta=\int \mathbf{v}^2 S t dv_r dv_\varphi dv_\theta=0. \tag{27}$$

После интегрирования соответственно получаем:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial r}+\rho\frac{\partial u}{\partial r}+2\frac{\rho u}{r}=0, \tag{28}$$

$$-\frac{P_{\varphi\varphi}}{r}\operatorname{ctg}\Theta-\frac{P_{\Theta\Theta}}{r}\operatorname{ctg}\Theta=0, \qquad (29)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u^2+P_{rr})-\frac{P_{\Theta\Theta}+P_{\varphi\varphi}}{r}+\frac{2\rho u^2}{r}+\frac{2P_{rr}}{r}=0, \qquad (30)$$

$$-\frac{uP_{\varphi\varphi}}{r}\operatorname{ctg}\Theta-\frac{Q_{r\varphi\varphi}\operatorname{ctg}\Theta}{r}+\frac{uP_{\Theta\Theta}}{r}\operatorname{ctg}\Theta+\frac{Q_{r\Theta\Theta}}{r}\operatorname{ctg}\Theta=0, \qquad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u^2+P_{rr})+\frac{\partial}{\partial r}(\rho u^3+3uP_{rr}+2Q_{rrr})-$$

$$-\frac{2}{r}(2Q_{r\Theta\Theta}+2Q_{r\varphi\varphi}+uP_{\Theta\Theta}+uP_{\varphi\varphi})+$$

$$+\frac{2\rho u^3}{r}+\frac{6uP_{rr}}{r}+\frac{4Q_{rrr}}{r}=\frac{<\sigma v>}{m}\rho(P-P_{rr}), \qquad (32)$$

$$\frac{\partial P_{\varphi\varphi}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(uP_{\varphi\varphi}+2Q_{r\varphi\varphi})+\frac{4uP_{\varphi\varphi}}{r}+\frac{8Q_{r\varphi\varphi}}{r}=$$

$$=\frac{<\sigma v>}{m}\rho(P-P_{\varphi\varphi}), \qquad (33)$$

$$\frac{\partial P_{\Theta\Theta}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial r}(uP_{\Theta\Theta}+2Q_{r\Theta\Theta})+\frac{4uP_{\Theta\Theta}}{r}+$$

$$+\frac{8Q_{r\Theta\Theta}}{r}=\frac{<\sigma v>}{m}\rho(P-P_{\Theta\Theta}). \qquad (34)$$

Из (29) следует: $P_{\varphi\varphi}=P_{\theta\theta}$; поэтому в дальнейшем для поперечного давления можно пользоваться одним символом:

$$P_{\perp}=P_{\varphi\varphi}=P_{\theta\theta}. \qquad (35)$$

Аналогично из (31) следует, что перенос тепла поперечными степенями свободы молекул можно обозначить

$$Q_{\perp}=Q_{r\varphi\varphi}=Q_{r\theta\theta}, \qquad (36)$$

а вместо символа Q_{rrr} впредь будем использовать $Q_{||}$. Из (35) и (36) следует, что уравнения (33) и (34) тождественны. Таким образом, вычисление моментов нулевого, первого и второго порядков от уравнения (9) дало из-за сферической симметрии четыре независимых уравнения (28), (30), (32) и (33). С помощью уравнения (28) уравнение (30) может быть приведено к виду

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial P_{||}}{\partial r}+\frac{2(P_{||}-P_{\perp})}{r}=0. \qquad (37)$$

Это уравнение движения. Оно отличается от уравнения Эйлера только последним членом, исчезающим при очень частых столкновениях, когда давление изотропно.

Из (32) и (33) с учетом (27) и (37) получается

$$\frac{\partial P_{||}}{\partial t}+u\frac{\partial P_{||}}{\partial r}+3P_{||}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2uP_{||}}{r}+2\frac{\partial Q_{||}}{\partial r}+\frac{4Q_{||}}{r}-$$

$$-\frac{8Q_{\perp}}{r}=\frac{<\sigma v>}{m}\rho(P-P_{||}), \qquad (38)$$

$$\frac{\partial P_\perp}{\partial t} + u\frac{\partial P_\perp}{\partial r} + P_\perp\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{4uP_\perp}{r} + 2\frac{\partial Q_\perp}{\partial r} + \frac{8Q_\perp}{r} =$$

$$= \frac{<\sigma v>}{m}\rho\,(P - P_\perp). \tag{39}$$

Так как при столкновениях сохраняется энергия, то

$$3P = P_{||} + 2P_\perp. \tag{40}$$

Поэтому введенную величину среднего (гидростатического) давления можно исключить, взяв сумму уравнения (38) и удвоенного уравнения (39):

$$\frac{\partial\,(P_\parallel + 2P_\perp)}{\partial t} + u\frac{\partial\,(P_\parallel + 2P_\perp)}{\partial r} + (3P_\parallel + 2P_\perp)\frac{\partial u}{\partial r} +$$

$$+ 2u\frac{P_\parallel + 4P_\perp}{r} + 2\frac{\partial\,(Q_\parallel + 2Q_\perp)}{\partial r} + \frac{4}{r}(Q_\parallel + 2Q_\perp) = 0. \tag{41}$$

Это не что иное, как уравнение энергии, приобретающее обычную форму при $P_\parallel = P_\perp$, $Q_\parallel = Q_\perp$. Вычитая почленно из (38) уравнение (39), получим еще одно уравнение, не содержащее среднего давления:

$$\frac{\partial\,(P_\parallel - P_\perp)}{\partial t} + u\frac{\partial\,(P_\parallel - P_\perp)}{\partial r} + (3P_\parallel - P_\perp)\frac{\partial u}{\partial r} +$$

$$+ \frac{2u}{r}(P_\parallel - 2P_\perp) + 2\frac{\partial\,(Q_\parallel - Q_\perp)}{\partial r} + \frac{4\,(Q_\parallel - 4Q_\perp)}{r} = \frac{P_\perp - P_\parallel}{\tau}, \tag{42}$$

которое описывает процесс изотропизации давления и содержит время релаксации

$$\tau = \frac{1}{<\sigma v>\, n}. \tag{43}$$

С помощью несложных алгебраических преобразований полученной системе можно придать вид законов сохранения, преобразовав уравнения к дивергентному виду:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u r^2) = 0, \tag{44}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 u) + \frac{\partial}{\partial r}[r^2(P_\parallel + \rho u^2)] - 2P_\perp r = 0, \tag{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[r^2(P_\parallel + 2P_\perp + \rho u^2)] + \frac{\partial}{\partial r}[r^2(2Q_\parallel + 4Q_\perp +$$

$$+ u\,(3P_\parallel + 2P_\perp) + \rho n^3)] = 0, \tag{46}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[r^2(P_\parallel - P_\perp + \rho u^2)] + \frac{\partial}{\partial r}[r^2(2Q_\parallel - 2Q_\perp - u\,(3P_\parallel - P_\perp) + \rho u^3)] -$$

$$- 6r\,(uP_\perp + 2Q_\perp) = \frac{r^2}{\tau}(P_\perp - P_\parallel). \tag{47}$$

Вместо последнего уравнения можно также взять

$$\frac{\partial}{\partial t}(r^2 P_\perp) + \frac{\partial}{\partial r}[r^2(Q_\perp - uP_\perp)] + 2r\,(Q_\perp + uP_\perp) = \frac{r^2}{3\tau}(P_\parallel - P_\perp). \tag{48}$$

Заметим, что уравнения (44), (45), (46) — точные уравнения для моментов функции распределения, учитывающие анизотропию давления. Дополнительное же уравнение (42), (47) или (48) основано на приближенном виде столкновительного члена и описывает единственный релаксационный процесс — стремление тензора давления к сферическому. Понятно, что пользоваться таким видом релаксационного члена можно лишь в тех случаях, когда процесс изотропизации давления доминирует над остальными релаксационными процессами — такими, как сглаживание пространственных градиентов скорости и давления вследствие диффузии импульса и энергии при столкновениях.

В газовом потоке, обладающем сферической симметрией, в отличие от плоско-симметричных течений, сама геометрия является сильным анизотропизатором функции распределения молекул по скоростям. Из-за закона сохранения момента при движении молекулы между столкновениями

$$r\sqrt{v_\theta^2+v_\varphi^2}=\mu=\mathrm{const}, \tag{49}$$

т. е. трансверсальная скорость молекулы $v_\perp$ убывает при ее удалении от источника

$$v_\perp=\mu/r. \tag{50}$$

Так как притяжением ядра кометы можно пренебречь, то полная скорость сохраняется:

$$v_r^2+v_\varphi^2+v_\theta^2=v^2=\mathrm{const}, \tag{51}$$

т. е. радиальная составляющая скорости при удалении от ядра увеличивается по закону

$$v_r=\sqrt{v^2-\frac{\mu^2}{r^2}}. \tag{52}$$

На основании этого можно заключить, что при сферическом растекании вещества без столкновений происходит «перекачка» энергии из поперечных степеней свободы в продольную, т. е. «трансверсальное охлаждение» и «радиальный нагрев». Столкновения стремятся воспрепятствовать этому процессу, выравнивая продольную и поперечную температуры, определяемые равенствами

$$P_{\parallel}=\varrho\mathfrak{R}_{\parallel}, \tag{53}$$

$$P_\perp=\varrho\,\mathfrak{R}_\perp, \tag{54}$$

где $\mathfrak{R}$ — газовая постоянная.

Проблема замыкания

Известная трудность при решении кинетического уравнения методом моментов состоит в том, чтобы надлежащим образом оборвать цепочку уравнений для моментов и замкнуть полученную в результате систему. Для того типа течений, который встречается в головах ярких комет, эту трудность можно преодолеть, так как эти течения происходят со сверхзвуковой скоростью.

В ОЯО время релаксации мало; поэтому давление с высокой точностью изотропно. Это непосредственно видно из уравнения (47), которое в пределе $\tau\to 0$ вырождается в условие

$$P_{\parallel}-P_\perp=o(\tau)\to 0. \tag{55}$$

Из качественных соображений ясно, что при малом τ функция распределения стремится к локально максвелловской, т. е. $Q_{\parallel}$ и $Q_{\perp}$ исчезают. В этом можно убедиться и формально, выписав уравнения для третьих моментов функции распределения. Таким образом, в ОЯО можно положить

$$P_{\perp}=P_{\parallel},\quad Q_{\parallel}=Q_{\perp}=0 \tag{56}$$

и тем самым получить замкнутую систему уравнений, совпадающую с уравнениями из энтропического течения идеального газа.

Так как нас интересует сверхзвуковое течение, можно считать малым параметром задачи обратное число Маха $\mathbf{M}^{-1}$. Если характерная тепловая скорость молекул $v_т$, то из (17), (18) и (19—(21) следует, что

$$\begin{aligned} P_{\parallel}&\sim\varrho v_т^2; \qquad P_{\perp}\sim\varrho v_т^2, \\ Q_{\parallel}&\sim\varrho v_т^3; \qquad Q_{\parallel}\sim\varrho v_т^3. \end{aligned} \tag{57}$$

Учитывая, что скорость звука $\sim v_т$, имеем

$$\frac{Q}{\rho u^3}\sim\mathbf{M}^{-3};\quad \frac{Q}{uP}\sim\mathbf{M}^{-2};\quad \frac{P}{\rho u^2}\sim\mathbf{M}^{-1}. \tag{58}$$

Это означает, что в сверхзвуковом потоке импульс переносится главным образом макроскопическим движением вещества, а не тепловым движением молекул, т. е. всегда

$$P<\varrho u^2. \tag{59}$$

Кроме того, ясно, что энергия переносится в первую очередь в результате перемещения элемента объема со своей кинетической энергией, во вторую очередь — в результате конвективного переноса внутренней энергии и лишь в третью — потоком, созданным исключительно тепловыми составляющими скоростей. Сказанное можно записать в виде

$$Q<uP<\varrho u^3, \tag{60}$$

или

$$Q\ll\varrho u^3. \tag{61}$$

В последнем выражении, как и в (59)—(60), величины P и Q употребляются без индексов, так как приведенные неравенства справедливы и для продольной и для поперечной составляющих этих величин. На основании последних соотношений можно выбрать в качестве замыкающих уравнений условие

$$Q_{\parallel}=Q_{\perp}=0, \tag{62}$$

которое совпадает с одним из условий (56), справедливых при большой плотности вещества. Так как замыкание цепочки уравнений (44)—(47) с помощью условия (62) никак не связано с величиной τ, то получающаяся система пригодна для описания сверхзвукового течения (если только число Маха всюду достаточно велико) при произвольных числах Кнудсена, т. е. независимо от величины свободного пробега.

Важным обстоятельством является то, что при малых числах Кнудсена по-прежнему выполняется (62), но уже при произвольных числах Маха. Следовательно, система, полученная из (44)—(47) отбрасыванием $Q_{\parallel}$ и $Q_{\perp}$, описывает сверхзвуковые потоки в области большой плотности вещества, начинающиеся с чисел Маха, лишь незначительно превосходящих единицу (ОЯО комет) и достигающих больших чисел Маха в ПО и СМО.

Для получения полностью замкнутой системы необходимо конкретизировать вид времени релаксации τ, определяемого соотношением

(43). Использованная форма столкновительного члена точная для так называемых максвелловских молекул, для которых

$$\sigma \sim v^{-1}. \tag{63}$$

В этом случае, обозначив через

$$\tau_0 = \frac{1}{\langle \sigma v \rangle n_0} \tag{64}$$

начальное значение времени релаксации, можно записать

$$\tau = \tau_0 \varrho_0 / \varrho. \tag{65}$$

Для других видов межмолекулярного взаимодействия столкновительный член в форме Бхатнагара — Гросса — Крука лишь приближенно описывает процесс релаксации с временем τ. Так как межмолекулярные силы весьма короткодействующие, то довольно близкие к истине результаты получаются, если считать молекулы упругими сферами. В этом приближении

$$\tau = \frac{1}{\sigma n \langle V_{\text{отн}} \rangle}, \tag{66}$$

где $\langle V_{\text{отн}} \rangle$ — среднее абсолютное значение относительной скорости молекул.

Для вычисления $V_{\text{отн}}$ необходимо знать функцию распределения. Переход от кинетического уравнения (9) к системе уравнений гидродинамического типа (44)—(47) сопровождается значительной потерей информации о виде функции распределения, так как в гидродинамическую систему входят только моменты не выше второго порядка. Ясно, что существует бесчисленное множество функций распределения, низшие моменты которых ведут себя согласно системе (44)—(47), а высшие различаются. Зная, что столкновения максвеллизируют газ, а сферическое расширение создает анизотропию давления и температуры, целесообразно принять в качестве допущения функцию распределения вида

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k T_{\parallel}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{m}{2\pi k T_{\perp}} e^{-\frac{m (v_r - u)^2}{2kT_{\parallel}} - \frac{m (v_\varphi^2 + v_\Theta^2)}{2kT_{\perp}}} \tag{67}$$

и вычислить для этого распределения $\langle V_{\text{отн}} \rangle$.

Вероятность того, что относительная скорость пары молекул имеет составляющие V_r, V_φ и V_Θ, определяется сверткой функций (67)

$$w(\mathbf{V}) = \frac{1}{n^2} \int f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v} + \mathbf{V}) \, d^3\mathbf{v}. \tag{68}$$

Нет необходимости вычислять этот интеграл, так как результат очевиден. Известно, что дисперсия разности независимых случайных величин ($\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}+\mathbf{V}$) равна сумме дисперсий этих величин. Поэтому в результате интегрирования получится снова максвелловское распределение, но с удвоенными температурами $T_{\parallel}$ и $T_{\perp}$:

$$w(\mathbf{V}) = \left(\frac{m}{4\pi k T_{\parallel}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{m}{4\pi k T_{\perp}} e^{-\frac{m V_r^2}{4kT_{\parallel}} - \frac{m (V_\varphi^2 + V_\Theta^2)}{4kT_{\perp}}} . \tag{69}$$

Переходя к полярным координатам в пространстве скоростей, имеем

$$V_r = V\sin\alpha,\quad V_\varphi = V\cos\alpha\cos\beta,\quad V_\theta = V\cos\alpha\sin\beta,$$
$$d^3\mathbf{V} = dV_r dV_\varphi dV_\theta = V^2 dV\cos\alpha\, d\alpha d\beta. \tag{70}$$

Среднее значение модуля относительной скорости

$$<V_{\text{отн}}> = \int_0^{2\pi} d\beta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha \int_0^\infty W(V,\ \alpha,\ \beta)\, V^3 dV =$$

$$= \frac{m}{2kT_\perp}\sqrt{\frac{m}{4\pi kT_\parallel}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\alpha d\alpha \int_0^\infty V^3 e^{-\frac{mV^2}{4k}\left(\frac{\sin^2\alpha}{T_\parallel}+\frac{\cos^2\alpha}{T_\perp}\right)} dV. \tag{71}$$

Выполняя интегрирование, получим

$$<V_{\text{отн}}> = 4\sqrt{\frac{kT_\parallel}{\pi m}}\left(\frac{1}{2} + \frac{T_\perp}{4T_\parallel}\sqrt{\frac{T_\parallel}{T_\parallel - T_\perp}}\ln\frac{1+\sqrt{\frac{T_\parallel - T_\perp}{T_\parallel}}}{1-\sqrt{\frac{T_\parallel - T_\perp}{T_\parallel}}}\right). \tag{72}$$

При интегрировании предполагалось $T_\parallel > T_\perp$, окончательное выражение (72) пригодно только для этого случая.

При малой анизотропии функции распределения, т. е. при

$$\frac{T_\parallel - T_\perp}{T_\parallel} \ll 1, \tag{73}$$

справедливо приближение

$$<V_{\text{отн}}> \cong 4\sqrt{\frac{kT_\parallel}{\pi m}}\left(1 - \frac{T_\parallel - T_\perp}{4T_\parallel}\right), \tag{74}$$

а при сильной анизотропии, т. е. при

$$\frac{T_\perp}{T_\parallel} \ll 1, \tag{75}$$

справедливо приближение

$$<V_{\text{отн}}> \cong 2\sqrt{\frac{kT_\parallel}{\pi m}}\left(1 + \frac{T_\perp}{2T_\parallel}\ln\frac{4T_\parallel}{T_\perp}\right). \tag{76}$$

Таким образом, $<V_{\text{отн}}>$ слабо зависит от $T_\perp$, и всегда

$$4\sqrt{\frac{kT_\parallel}{\pi m}} < <V_{\text{отн}}> < 2\sqrt{\frac{kT_\parallel}{\pi m}}. \tag{77}$$

Обозначив для краткости через $\varphi(T_\perp/T_\parallel)$ выражение в скобках в формуле (72), имеем

$$\tau = \frac{1}{\sigma n\cdot 4\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}\,\varphi\left(\frac{T_\perp}{T_\parallel}\right)}. \tag{78}$$

Поскольку в рассматриваемом случае

$$\tau_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\,\sigma n_0 \sqrt{\dfrac{8kT_0}{\pi m}}} \sim \frac{\lambda_0}{\langle V_{\text{отн}} \rangle}, \tag{79}$$

то

$$\tau = \tau_0 \frac{\rho_0}{\rho} \sqrt{\frac{T_0}{T_\parallel}} \frac{1}{\varphi\,(T_\perp/T_\parallel)}. \tag{80}$$

Виллис и Хеймел пользуются временем релаксации, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\tau = \tau_0 \frac{\rho_0}{\rho} \left[\frac{T_0\,(1+c)}{T_\parallel + cT_\perp} \right]^\beta, \tag{81}$$

полагая, что случай $c=0$, $\beta = \frac{1}{2}$ соответствует модели упругих сферических молекул. Можно надеяться, что результаты, полученные на основании (81), окажутся качественно справедливыми, так как функция φ изменяется лишь в пределах от $^1/_2$ до 1.

В заключение выпишем окончательный вид замкнутой системы уравнений, пригодных для описания как стационарных, так и нестационарных движений нейтрального вещества в околоядерной области и переходной области в атмосферах комет:

$$\frac{\partial\,(\rho r^2)}{dt} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 u) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 u) + \frac{\partial}{\partial r}[\rho r^2\,(u^2 + RT_\parallel)] - 2\rho r RT_\perp = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho r^2\,(u^2 + RT_\parallel + 2RT_\perp)] + \frac{\partial}{\partial r}[\rho u r^2\,(u^2 + 3RT_\parallel + 2RT_\perp)] = 0, \tag{83}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r^2 T_\perp) + 2\rho u r T_\perp + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u r^2 T_\perp) =$$

$$= \frac{\rho r^2}{3\tau}(T_\parallel - T_\perp) = \begin{cases} \dfrac{\rho^2 r^2}{\rho_0 \tau_0} \left[\dfrac{T_\parallel + cT_\perp}{T_0\,(1+c)} \right]^\beta (T_\parallel - T_\perp). & \text{(Х. и В.)} \\[2ex] \dfrac{\rho^2 r^2}{\rho_0 \tau_0} \sqrt{\dfrac{T_\parallel}{T_0}}\,\varphi \left(\dfrac{T_\perp}{T_\parallel} \right) (T_\parallel - T_\perp) & \text{(упругие сферические молекулы).} \end{cases} \tag{84}$$

При сравнительно медленном изменении граничных условий на поверхности ядра течение в ОЯО, а иногда и в ПО можно считать стационарным. Тогда стационарное решение системы (44), (82)—(84) должно быть использовано для определения граничных условий, с которых начинается свободномолекулярный режим во внешних частях головы и хвосте кометы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов А. А. Статистические функции распределения. Физматгиз. М., 1966.
2. Гнедин Ю. Н., Долгинов А. З. — Астрон. журн., 1966, **43**, 181.
3. Мохнач Д. О. — Бюлл. ИТА АН СССР, 1956, **6**, 269.

4. Мохнач Д. О. — ДАН СССР, 1958, **35**, 605.
5. Мохнач Д. О. — Астрон. журн., 1958, **120**, 1228.
6. Мохнач Д. О. — ДАН СССР, 1964, **157**, 309.
7. Шульман Л. М. — Астром. и астрофиз. «Наукова думка», К., 1969, **4**, 101.
8. Шульман Л. М. — Астрон. и астрофиз. «Наукова думка», К., 1969, 4, 117.
9. Bhathnagar L. I., Gross E. P., Krook M. A. — J. Fl. Mech., 1959, **92**, 111.
10. Finson M. L., Probstein R. F. — Publ. Fluid Mech. Lab., 1967, Nr. 67—4.
11. Hamel B. B., Willis D. R. — Phys. Fluids, 1966, **2**, 829.
12. Haser L. — Nature et origine des comètes, 1966 (Coll. int. d'astrophysique, Liege, 1965), Belgique, 1966, 223.

MOVEMENT OF NEUTRAL MATTER IN THE COMETARY ATMOSPHERE

L. M. SHULMAN

Summary

The article presents the lecture delivered at the summer school on the physics of comets (the Crimean Astrophysical Observatory, September, 1968).

Stratification of the cometary atmosphere founded on the dynamic properties of matter is discussed. The deduction is given of equations to describe neutral gas flow within the part of atmosphere where the collisions are infrequent but not negligible. Such equations may be useful to describe the movement in the inner part of the bright cometary heads.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛОТНОСТИ НЕЙТРАЛЬНОГО ВЕЩЕСТВА В АТМОСФЕРЕ КОМЕТЫ *

Л. М. Шульман

(ГАО АН УССР, г. Киев)

1. Распределение молекул по скоростям на границе области свободно-молекулярного разлета

В [2] приведен вывод уравнений, описывающих течение газа в переходной области от газодинамического к свободно-молекулярному режиму течения. Считая ПО областью стационарного течения, можно найти ход продольной и поперечной температур (см. [1]). Если течение газа стационарно, то, интегрируя уравнения (44) и (83), приведенные в [2], имеем

$$\varrho r^2 u = \varrho_0 r_я^3 u_0, \tag{1}$$

$$u^2 + 3RT_{\parallel} + 2RT_{\perp} = u_0^2 + 5RT_0 = 2H_0. \tag{2}$$

В последнем случае использовано граничное условие

$$T_{\parallel 0} = T_{\perp 0} = T_0. \tag{3}$$

Из уравнения (84), приведенного в [2], с учетом (1) получается

$$\frac{dT_{\perp}}{dr} + \frac{2T_{\perp}}{r} = \frac{u_0 r_я^2}{\tau_0 u^2 r^2}\left[\frac{T_{\parallel} + cT_{\perp}}{T_0(1+c)}\right]^{\beta}(T_{\parallel} - T_{\perp}), \tag{4}$$

а уравнение (82) из [2] преобразуется к виду

$$\frac{d}{dr}\left(u + \frac{RT_{\parallel}}{u}\right) - \frac{2RT_{\perp}}{ur} = 0. \tag{5}$$

* Лекция, прочитанная в летней школе по физике комет (Крымская АО, сентябрь 1968 г.).