9, 10. Publications of the International Latitude Observatory of Mizusava, 4, 1, 1951; 2, 1953.
11. Tukey J. W. — Annals of mathematical statistics, 33, 1, 1962.

ON ATTACHING WEIGHTS TO ASTRONOMICAL OBSERVATIONS

I. V. DZHUN

Summary

The author recommends the weighted average based on smoothing the sample distribution by means of one of the Pearson curves as the most probable estimate of an observed value. The method is illustrated by the analysis of concurrent observations with two zenith telescopes at Mizusawa.

ИЗУЧЕНИЕ ОШИБОК НАБЛЮДЕНИЙ ГОЛОСЕЕВСКОГО КАТАЛОГА ЗВЕЗД ШИРОТНЫХ ПРОГРАММ. I.

А. С. Харин, Я. С. Яцкив

(ГАО АН УССР, г. Киев)

Одним из возможных путей повышения точности определения положений и собственных движений звезд является усовершенствование методики обработки астрометрических наблюдений на основе современных достижений математической статистики и теории случайных функций. По инициативе Е. П. Федорова работы в этом направлении недавно начаты в ГАО АН УССР. Предполагается выработать обоснованные в теоретико-вероятностном смысле рекомендации для нахождения эффективных оценок и изучения ошибок наблюдений склонений и прямых восхождений, для назначения весов при составлении сводного каталога и др. Некоторые из этих вопросов будут рассмотрены на примере Голосеевского каталога склонений звезд широтных программ [1]. В настоящей статье основное внимание уделяется изучению распределения случайных ошибок и методу оценки наиболее вероятных значений склонений по данным наблюдений.

1. Закон распределения случайных ошибок наблюдений склонений

Пусть δ_{ij} — наблюденные значения склонения i-й звезды ($j=1, 2, \ldots, n$, где n — число наблюдений), $v_{ij}=\delta_{ij}-\delta_i$ — уклонения наблюденных значений склонения от среднеарифметического. Значениями v_{ij} можно воспользоваться для построения эмпирического распределения случайных ошибок наблюдений склонений. С этой целью разобьем интервал возможных значений v_{ij} на градации таким образом, чтобы их число l приблизительно равнялось $10 \lg N$, где N — общее число уклонений. В нашем случае, учитывая, что $N \approx 12000$, $v_{ij} \approx \pm 2''.0$, удобно принять размер градации $\Delta h = 0''.10$. В табл. 1 для середины каждой градации h_k приведены значения эмпирических частот n_k. При этом если уклонение v_{ij} попадало на границу между градациями, к соответствующим частотам прибавлялось по 0.5.

Обычно предполагается, что истинное распределение случайной величины принадлежит некоторому семейству $F(v, \Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_n)$, зависящему от конкретных значений параметров $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_n$. Эти параметры нам неизвестны, и их нужно оценить по данным выборки. После этого можно проверить гипотезу о согласии эмпирического и теоретического распределений. Предположим, что проверяется гипотеза нормальности. В качестве приближения к теоретической плотности вероятности рассмотрим

Таблица 1

Середина градаций h_k	Эмпирические частоты n_k	Теоретические частоты Np_k: Нормальный закон	Смешанный нормальный	Кривая Пирсона VII типа
—1.9	1.0	0.1	1.3	3.3
—1.8	1.5	0.4	2.0	4 6
—1.7	6.0	0.9	3.7	6.7
—1.6	12.0	2.0	6.3	9.4
—1.5	15.5	4.4	10.8	13.4
—1 4	24.0	9.1	17.4	19.0
—1.3	14.5	17.3	27.4	27.8
—1.2	38.0	31.4	41.6	40.2
—1.1	52.0	54.9	62.0	58.7
—1.0	67.5	91.7	89.8	86.3
—0.9	131.0	144.5	128.6	118.0
—0.8	184.0	217.8	182.1	182.4
—0.7	308.0	314.6	258.9	261.2
—0 6	368.5	428.8	360.1	366.8
—0.5	484.0	559.3	493.8	502.1
—0.4	657.5	698.5	655.3	659.2
—0.3	839.0	823.7	830.3	828.2
—0.2	1037.5	929.4	991.4	981 3
—0.1	1090.5	1004.0	1107.0	1092.3
0	1106.0	1024.0	1148.8	1133.5
+0.1	1113.5	1004.0	1107.0	1092.3
+0.2	963 5	929.4	991.4	981.3
+0.3	837.0	823.7	830.3	828.2
+0.4	607.5	698.5	655.3	659.2
+0.5	511.5	559.3	493.8	502.1
+0.6	372.5	428 8	360.1	366.8
+0.7	267.0	314.6	258.9	261.2
+0.8	207.5	217.8	182.1	182.4
+0.9	117.0	144.5	128.6	118.0
+1.0	90.0	91.7	89.8	86.3
+1.1	58.5	54.9	62.0	58.7
+1.2	36.0	31.4	41.6	40.2
+1.3	28.0	17.3	27.4	27.8
+1.4	17.5	9.1	17.4	19.0
+1.5	10.0	4.4	10.8	13.4
+1.6	4.5	2.0	6.3	9.4
+1.7	4.5	0.9	3.7	6.7
+1.8	4.0	0.4	2.0	4.6
+1.9	3.0	0.1	1.3	3.3
	$N=11691.0$			
	χ^2	398.1	54.8	45.6
	$\chi^2_{0{,}01}$	58.6	56.1	57.3
	$\chi^2_{0{,}05}$	51.0	48.6	49.8

$$f(v) = (2\pi s^2)^{-1/2} e^{-\frac{(v-\overline{v})^2}{2s^2}}, \tag{1}$$

где $\overline{v}$, s^2 — эмпирические оценки математического ожидания и дисперсии соответственно. В нашем случае

$$\overline{v} = 0,$$

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum_{ij} v_{ij}^2.$$

Или, используя значения эмпирических частот

$$s^2 = m_2 = m_2' + \Delta m_2, \tag{2}$$

где

$$m_2' = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{l} n_k h_k^2,$$

$\Delta m_2 = -\frac{1}{12}(\Delta h)^2$ — известная поправка Шеппарда.

По (1) легко найти теоретическую вероятность p_k попадания в k-ю градацию и соответствующую частоту Np_k. В качестве критерия соответствия эмпирического и теоретического распределений используем χ^2-критерий

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{l} \frac{(n_k - Np_k)^2}{Np_k} \tag{3}$$

Если окажется, что вычисленное по (3) значение больше 1%-ной точки χ^2-распределения с l—3 степенями свободы, то гипотеза о согласии эмпирического и теоретического распределений должна быть отвергнута. Для нормального закона (1) мы получили

$$\chi^2 \gg \chi^2_{0\cdot 01},$$

т. е. распределение v_{ij} сильно отличается от нормального (см. табл. 1).

Подобные результаты обнаружены ранее при анализе широтных наблюдений [2], а также наблюдений склонений, выполненных абсолютным методом на том же вертикальном круге Ваншаффа [3]. Оказывается, что эмпирическое распределение погрешностей продолжительных рядов наблюдений чаще всего обладает положительным эксцессом. Это, согласно работам Эддингтона и Огородникова [4], может соответствовать смешанному нормальному распределению, т. е. составленному из некоторого числа, конечного или бесконечного, нормальных законов с различными параметрами.

Предположим, что плотность смешанного нормального распределения

$$f(v) = af_1(v) + (1-a)f_2(v), \tag{4}$$

причем $f_{1,2}(v)$ имеет вид (1).

Для оценки неизвестных параметров s^2_1, s^2_2, a по данным выборки воспользуемся формулами, полученными в [5],

$$s^2_1 = t_1 + m_2,$$

$$s^2_2 = t_2 + m_2,$$

$$a = -\frac{t_2}{(t_1 - t_2)} \tag{5}$$

где

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_6}{5\varkappa_4}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{\varkappa_6}{5\varkappa_4}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\varkappa_4\right)}. \tag{6}$$

$$\varkappa_4 = m_4 - 3m^2_2,$$

$$\varkappa_6 = m_6 - 15m_4m_2 - 10m^2_3 + 30m^3_2,$$

$\varkappa_4$ и $\varkappa_6$ — выборочные кумулянты четвертого и шестого порядков соответственно. Последние вычисляются по эмпирическим моментам

$$m_r = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{l} n_k h_k^r + \Delta m_r, \tag{7}$$

где Δm_r — упомянутые выше поправки Шеппарда.

По данным табл. 1 мы получили

$$\begin{array}{lll}
m_2 = \ \ 0''.2059, & \varkappa_4 = +0.0307, & s^2_1 = 0''.0977, \\
m_3 = -0\ .0001, & \varkappa_6 = -0.0021, & s^2_2 = 0''.3005, \\
m_4 = \ \ 0\ .1579, & t_1 = -0.1082, & \alpha = 0\ .4665. \\
m_6 = \ \ 0\ .2244, & t_2 = +0.0946, &
\end{array}$$

Таким образом, каждому из распределений, дисперсии которых сильно отличаются друг от друга, принадлежит примерно одинаковое количество наблюдений. Используя полученные результаты, легко подсчитать по (4) теоретические частоты для смешанного нормального распределения и проверить гипотезу о согласии его с эмпирическим (см. табл. 1). Вычисленное значение χ^2 очень уменьшилось и удовлетворяет неравенству

$$\chi^2 < \chi^2_{0.01}.$$

Все же $\chi^2 > \chi^2_{0.05}$, так что эмпирическое распределение лишь в первом приближении можно представить выражением (4). По-видимому, при увеличении количества членов выражения (4) можно было бы добиться лучшего согласия эмпирического и теоретического распределений. Из изложенного следует, что ряд наблюденных склонений δ_{ij} не является однородным по точности. Было бы очень важно установить причину этой неоднородности. С этой целью множество уклонений v_{ij} разбивали на группы в зависимости от величины склонения звезд и периода наблюдений. В табл. 2 и 3 приведены соответствующие эмпирические и теоретические (нормальный закон) частоты. Во всех случаях, за исключением наблюдений 1961 г., распределение уклонений очень отличается от нормального.

Таблица 2

Середина градаций h_k	Эмпирические n_k и теоретические Np_k (нормальный закон) частоты по зонам склонений											
	20—30°		30—40°		40—50°		50—60°		60—70°		70—80°	
	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k
−1.9									1.0	0.04		
−1.8							1.5	0.1	0	0.1		
−1.7	2.0	0.1	1.0	0.2	1.5	0.2	0.5	0.2	1.0	0.2		
−1.6	2.5	0.2	1.0	0.3	4.0	0.5	2.0	0.6	2.5	0.5		
−1.5	1.5	0.3	1.5	0.7	5.5	1.0	3.5	1.7	3.5	0.9		
−1.4	0	0.7	6.5	1.5	5.0	2.1	6.5	2.5	5.0	1.9	1.0	0.1
−1.3	2.5	1.3	2.0	2.8	1.0	4.1	6.5	5.1	2.5	3.6	0	0.2
−1.2	0.5	2.4	9.0	5.2	9.5	7.5	6.5	9.1	9.5	6.4	3.0	0.5
−1.1	3.0	4.1	10.5	9.1	10.0	13.2	12.5	15.5	14.0	11.0	2.0	1.0
−1.0	6.5	6.7	7.0	15.2	13.5	22.2	22.5	25.1	16.0	18.1	2.0	2.1
−0.9	12.0	10.5	20.0	24.3	31.5	35.1	38.0	38.9	25.0	22.2	4.5	4.0
−0.8	9.5	15.8	36.0	36.7	40.5	53.4	46.0	57.3	37.5	42.1	14.5	5.6
−0.7	16.0	22.4	42.5	52.9	89.5	76.6	88.0	81.8	52.5	59.8	19.5	13.7
−0.6	24.0	30.5	62.5	73.0	88.0	105.2	98.0	110.0	76.5	81.2	19.5	19.1
−0.5	36.5	39.2	69.0	95.0	124.5	138.2	120.5	141.8	90.5	105.0	43.0	28.5
−0.4	59.5	49.0	109.5	118.3	155.5	171.4	167.5	174.1	111.0	129.7	54.5	39.9

Продолжение табл. 2

Середина градаций h_k	Эмпирические n_k и теоретические Np_k (нормальный закон) частоты по зонам склонений											
	20—30°		30—40°		40—50°		50—60°		60—70°		70—80°	
	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k
—0.3	62.0	57.9	144.0	141.0	220.5	203.3	205.0	206.0	147.5	152.8	60.0	52.5
—0.2	70.5	65.5	186.0	158.6	245.0	230.8	273.5	230.2	187.5	171.8	75.0	75.8
—0.1	83.5	70.0	192.0	170.6	266.5	247.2	265.5	246.7	177.5	184.4	105.5	83.1
0.0	72.5	71.7	219.5	175.6	253.0	254.4	256.5	253.6	223.5	187.8	81.0	85.7
+0.1	60.5	70.0	190.5	170.6	261.5	247.2	292.0	246.7	215.5	184.4	93.5	83.1
+0.2	71.5	65.5	155.5	158.6	248.0	230.8	239.0	230.2	175.5	171.8	74.0	75.8
+0.3	60.0	57.9	143.5	141.0	216.0	203.3	194.5	206.0	152.5	152.8	70.5	65.0
+0.4	35.0	49.0	99.0	118.3	161.5	171.4	151.5	174.4	127.0	129.7	33.5	52.5
+0.5	39.5	39.2	75.0	95.0	144.0	132.8	123.5	141.8	93.5	105.0	36.0	39.9
+0.6	33.5	30.5	54.5	73.0	87.0	105.2	84.5	110.0	84.5	81.2	28.5	28.5
+0.7	21.0	22.4	49.5	52.9	60.0	76.6	79.0	81.8	42.5	59.8	15.0	19.1
+0.8	17.5	15.8	30.0	36.7	48.5	53.4	53.5	57.6	46.0	42.1	12.0	13.7
+0.9	8.5	10.5	21.5	24.3	21.0	35.1	38.5	38.9	22.0	22.2	5.5	5.6
+1.0	6.5	6.7	13.0	15.2	27.0	22.2	25.5	25.1	11.0	18.1	7.0	4.0
+1.1	3.0	4.1	7.0	9.1	15.0	13.2	20.0	15.5	11.0	11.0	2.5	2.1
+1.2	1.0	2.4	9.0	5.2	7.0	7.5	11.0	9.1	8.0	6.4	0	1.0
+1.3	2.0	1.3	9.0	2.8	6.0	4.1	7.0	5.1	3.0	3.6	1.0	0.5
+1.4	1.0	0.7	5.5	1.5	5.0	2.1	1.0	2.5	3.0	1.9	2.0	0.2
+1.5	0	0.3	2.0	0.7	4.0	1.0	1.0	1.7	3.0	0.9		
+1.6	0	0.2	1.0	0.3	0.5	0.5	1.5	0.6	1.5	0.5		
+1.7	0	0.1	1.0	0.2	0.5	0.2	1.5	0.2	0.5	0.2		
+1.8	1.0	0.03	0.5	0.06			1.5	0.1				
+1.9			0.5	0.02			0.5	0.06				
χ^2	123.2		126.7		111.92		107.9		90.2		87.6	
$\chi^2_{0.01}$	54.8		56.1		53.5		57.3		56.1		45.6	
$\chi^2_{0.05}$	47.4		48.6		46.2		49.8		48.6		38.9	

Таблица 3

Середина градаций h_k	Эмпирические n_k и теоретические Np_k (нормальный закон) частоты по годам					
	1959		1960		1961	
	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k
—1.9			1.0	0.05		
—1.8			1.5	0.1		
—1.7	4.5	1.4	1.5	0.3		
—1.6	6.5	2.7	4.0	0.6		
—1.5	8.5	4.8	8.0	1.3		
—1.4	15.0	8.2	8.0	2.8		
—1.3	9.5	13.6	4.5	5.5		
—1.2	20.5	21.7	18.5	10.4	0.5	2.1
—1.1	31.0	38.7	14.5	18.8	6.0	4.8
—1.0	30.0	43.4	19.5	32.2	10.5	9.7
—0.9	66.0	69.7	42.5	52.4	22.0	18.5
—0.8	70.0	95.5	80.5	80.6	31.0	33.2
—0.7	135.0	127.0	101.0	118.8	61.0	55.2
—0.6	142.5	161.1	116.5	165.8	88.5	86.1
—0.5	176.5	197.6	196.0	219.7	109.0	128.2
—0.4	223.5	234.9	253.0	275.4	171.5	167.7
—0.3	270.0	266.3	318.5	330.8	238.0	216.6
—0.2	347.0	292.2	401.5	376.0	250.0	258.0
—0.1	342.0	309.0	442.0	406.1	285.5	284.8
0	335.5	316.4	471.5	414.8	279.0	294.6
+0.1	354.5	309.0	434.0	406.1	304.0	284.8
+0.2	306.5	292.2	395.0	376.0	253.5	258.0
+0.3	255.5	266.3	344.5	330.8	207.0	216.6

Продолжение табл. 3

Середина градаций h_k	Эмпирические n_k и теоретические Np_k (нормальный закон) частоты по годам					
	1959		1960		1961	
	n_k	Np_k	n_k	Np_k	n_k	Np_k
+0.4	196.0	234.9	280.0	275.4	171.5	167.7
+0.5	182.5	197.6	204.0	219.7	134.0	128.2
+0.6	136.0	161.1	143.5	165.8	85.0	86.1
+0.7	116.5	127.0	95.5	118.8	50.0	55.2
+0.8	96.5	95.5	74.0	80.6	30.5	33.2
+0.9	61.0	69.7	39.5	52.4	19.0	18.5
+1.0	47.0	43.4	39.0	32.2	9.0	9.5
+1.1	37.5	38.7	18.0	18.8	5.5	4.8
+1.2	15.5	21.7	17.5	10.4	4.5	2.1
+1.3	17.5	13.6	9.5	5.5	1.0	0.9
+1.4	18.0	8.2	2.0	2.8		
+1.5	8.0	4.8	4.5	1.3		
+1.6	3.5	2.7	2.5	0.6		
+1.7	2.5	1.4	2.0	0.3		
+1.8	3.5	0.8	0.5	0.1		
+1.9	1.5	0.4	0.5	0.05		
+2.0	2.0	0.2				
χ^2	100.9		201.1		15.2	
$\chi^2_{0.01}$	57.3		58.6		41.6	
$\chi^2_{0.05}$	49.8		51.0		35.2	

Таблица 4

Параметр	Материал наблюдений			
	20—30°	30—40°	40—50°	50—60°
m_2	0.2098	0.2041	0.2040	0.2157
m_3	—0.0176	0.0103	0.0018	—0.0005
m_4	0.1650	0.1643	0.1549	0.1815
m_6	0.2707	0.2341	0.2245	0.2612
$\varkappa_4$	0.0330	0.0392	0.0301	0.0420
$\varkappa_6$	0.0247	—0.0144	+0.0055	—0.0253
t_1	—0.0540	—0.1568	—0.0835	—0.1930
t_2	0.2037	0.0834	0.1200	0.0725
s_1^2	0.1558	0.0473	0.1205	0.0227
s_2^2	0.4135	0.2875	0.3240	0.2882
α	0.7904	0.3472	0.5897	0.2731

Продолжение табл. 4

Параметр	Материал наблюдений				
	60—70°	70—80°	1959 г.	1960 г.	1961 г.
m_2	0.2133	0.1626	0.2678	0.1945	0.1454
m_3	—0.0133	0.0153	0.0162	—0.0013	0.0008
m_4	0.1650	0.1022	0.2522	0.1461	0.0627
m_6	0.2309	0.1505	0.4091	0.2084	0 0432
$\varkappa_4$	0.0286	+0.0230	0.0371	0.0327	—0.0006
$\varkappa_6$	—0.0072	0.0285	—0.0304	0.0044	—0.0003
t_1	—0.1259	—0.0278	—0.2201	—0.0918	+0 1020
t_2	0.0756	0.2758	0.0562	0.1188	—0.0020
s_1^2	0.0865	0.1348	0.0477	0.1027	0.2474
s_2^2	0.2880	0.4384	0.3240	0.3133	0.1434
α	0.3752	0.9084	0.2034	0.5641	0.0192

Подсчитаем по данным табл. 2 и 3 параметры смешанного нормального распределения (4). Из табл. 4 видно, что для всех зон по склонению $s^2_1 < s^2_2$, а $\alpha \approx 0.5$. Отсюда следует, что причина неоднородности наблюдений не связана с величиной склонения. В то же время в разные годы эмпирическое распределение аппроксимируется выражением (4) с существенно различными параметрами. Это свидетельствует о наличии каких-то источников ошибок, зависящих от времени наблюдений и приводящих к существенным отклонениям эмпирического распределения от нормального.

Таблица 5

Середина градаций h_k	Эмпирические частоты n_k	Теоретические частоты Np_k: Нормальный закон	Смешанный закон	Кривая Пирсона VII типа
—1.7	1.0	0.05	0.4	1.0
—1.6	1.0	0.1	0.7	1.4
—1.5	1.0	0.3	1.4	2.0
—1.4	3.0	0.6	2.4	3.0
—1.3	1.5	2.1	4.1	4.4
—1.2	9.0	3.8	6.8	6.6
—1.1	8.0	7.6	10.7	10.0
—1.0	20.5	14.1	16.5	15.3
—0.9	18.0	24.8	24.7	23.2
—0.8	47.5	41.2	35.9	35.4
—0.7	45.0	64.2	52.4	53.3
—0.6	77.5	94.5	76.3	79.2
—0.5	118.5	131.1	109.9	114.0
—0.4	168.5	171.2	154.3	157.9
—0.3	199.5	210.8	206.8	207.6
—0.2	252.5	244.5	258.6	268.7
—0.1	293.0	267.3	297.6	290.7
0.0	288.5	275.4	312.1	304.4
0.1	286.0	267.3	297.6	268.7
0.2	271.5	244.5	258.6	290.7
0.3	221.0	210.8	206.8	207.6
0.4	166.0	171.2	154.3	157.9
0.5	109.0	131.1	109.9	114.0
0.6	75.0	94.5	76.3	79.2
0.7	61.0	64.2	52.4	53.3
0.8	33.5	41.2	35.9	35.4
0.9	17.5	24.8	24.7	23.2
1.0	12.5	14.1	16.5	15.3
1.1	8.5	7.6	10.7	10.0
1.2	5.0	3.8	6.8	6.6
1.3	2.5	2.1	4.1	4.4
1.4	4.0	0.6	2.4	3.0
1.5	3.5	0.3	1.4	2.0
1.6	2 0	0.1	0.7	1.4
χ^2		171.1	32.0	23.2
$\chi^2_{0.01}$		52.2	49.6	50.9
$\chi^2_{0.05}$		45.0	42.6	43.8

До сих пор мы изучали уклонения v_{ij}, найденные как по опорным, так и определяемым звездам. Вполне возможно, что различие в точности наблюдений этих звезд приводит к смешанному нормальному распределению. Для проверки этого предположения мы построили кривую распределения только по наблюдениям опорных звезд, которые вошли в Голосеевский каталог (табл. 5), и нашли

$$m_2 = 0.1675, \quad \varkappa_4 = 0.0231, \quad s^2_1 = 0.0763,$$
$$m_3 = -0.0017, \quad \varkappa_6 = -0.0008, \quad s^2_2 = 0.2519,$$
$$m_4 = 0.1074, \quad t_1 = -0.0912, \quad \alpha = 0.4806.$$
$$m_6 = 0.1282, \quad t_2 = 0.0844,$$

Полученные результаты почти совпадают с приведенными для всего материала наблюдений. Следовательно, причина отклонения распределения от нормального общая как для опорных, так и для определяемых звезд. По-видимому, справедливо утверждение Г. Джеффриса о том, что нормальный закон вообще не применим к распределению случайных ошибок на всем протяжении любых рядов наблюдений. Воспользуемся для аппроксимации эмпирического распределения кривой Пирсона VII типа:

$$f(v) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[1 + \frac{(v-\bar{v})^2}{2M\sigma^2}\right]^{-m}, \tag{8}$$

где σ, $\bar{v}$, m — неизвестные параметры, A, M — коэффициенты, зависящие от m.

Согласно рекомендации Г. Джеффриса, принимаем $m=4$ и по таблице, приведенной в [4], находим теоретические частоты для выражения (8) (см. табл. 1 и 5).

Вычисленное значение χ^2 уменьшилось по сравнению со смешанным нормальным распределением и удовлетворяет неравенству

$$\chi^2 < \chi^2_{0.05}.$$

Таким образом, согласие эмпирического распространения и кривой Пирсона VII типа также не противоречит данным наблюдений.

2. О назначении апостериорных весов

Еще Ньюкомб предложил метод обработки рядов наблюдений, основанный на гипотезе «смеси» нескольких групп, распределенных по нормальному закону с различными параметрами [4]. Суть метода заключается в следующем. Пусть плотность вероятности случайной ошибки наблюдений данного ряда равна

$$f(v) = \alpha_1 (2\pi s_1^2)^{-1/2} e^{-\frac{v_1^2}{2s_1^2}} + \alpha_2 (2\pi s_2^2)^{-1/2} e^{-\frac{v_2^2}{2s_2^2}} + \ldots$$

$$\ldots + \alpha_q (2\pi s_q^2)^{-1/2} e^{-\frac{v_q^2}{2s_q^2}}, \tag{9}$$

где

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_q = 1.$$

Или, в обозначениях Ньюкомба,

$$f(v) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_q\}, \tag{10}$$

где

$$\omega_\nu = \alpha_\nu (s_\nu^2)^{-1/2} e^{-\frac{v_\nu^2}{2s_\nu^2}}.$$

Вероятность того, что при n независимых наблюдениях данной звезды получились именно погрешности $v_1, v_2, \ldots, v_n$, пропорциональна произведению

$$\psi(v) = f(v_1) \cdot f(v_2) \ldots f(v_n). \tag{11}$$

Наиболее вероятное значение склонения данной звезды $\bar{\delta}$ находится по методу максимального правдоподобия из условия $\psi(v) = max$, которое приводит к уравнению

$$\frac{\psi'(v)}{\psi(v)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{f'(v_j)}{f(v_j)} = 0. \tag{12}$$

Подставляя теперь в (12) соответствующие величины из (9), (10) и (11), получим

$$\bar{\delta} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \delta_j w(v_j)}{\sum\limits_{j=1}^{n} w(v_j)}, \tag{13}$$

где апостериорные веса

$$w(v_j) = \frac{1}{v_j} \cdot \frac{f'(v_j)}{f(v_j)} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{q} \bar{s}_\nu^{-2} w_\nu(v_j)}{\sum\limits_{\nu=1}^{q} w_\nu(v_j)}. \tag{14}$$

Таким образом, для оценки апостериорных весов по формуле (14) необходимо знать параметры смешанного нормального распределения s^2_ν и α_ν. Н. И. Идельсон считал «слабой стороной метода Ньюкомба... то обстоятельство, что ни число групп, ни мера точности для каждой из них, ни основные вероятности α_ν не могут быть определены наперед какими-либо строгими правилами...» [4]. Однако недавно был предложен строгий метод определения дисперсий и основных вероятностей для случая двух групп, которым мы и пользовались в предыдущем параграфе.

Теперь можно вычислить соответствующие веса по аргументу v_j — отклонения наблюденного значения склонения от среднеарифметического. Значения $w(v_j)$ приведены для разных лет в табл. 6. Поскольку

Таблица 6

Уклонения (v_j)	Апостериорные веса $w(v_j)$			Уклонения (v_j)	Апостериорные веса $w(v_j)$		
	1959 г.	1960 г.	1961 г.		1959 г.	1960 г.	1961 г.
0.00	10.1	7.7	7.0	0.75	3.2	4.9	7.0
0.05	10.0	7.7	7.0	0.80	3.1	4.6	7.0
0.10	9.8	7.7	7.0	0.85	3.1	4.3	7.0
0.15	9.3	7.6	7.0	0.90	3.1	4.0	7.0
0.20	8.7	7.5	7.0	0.95	3.1	3.8	7.0
0.25	7.9	7.4	7.0	1.00	3.1	3.7	7.0
0.30	7.1	7.3	7.0	1.05	3.1	3.5	7.0
0.35	6.3	7.1	7.0	1.10	3.1	3.5	7.0
0.40	5.5	6.9	7.0	1.15	3.1	3.4	7.0
0.45	4.8	6.7	7.0	1.20	3.1	3.3	7.0
0.50	4.2	6.4	7.0	1.25	3.1	3.2	7.0
0.55	3.8	6.2	7.0	1.30	3.1	3.2	7.0
0.60	**3.5**	**5.8**	7.0	Более 1.30	3.1	3.2	7.0
0.65	3.3	5.5	7.0				
0.70	3.2	5.2	7.0				

наблюдения в 1961 г. подчиняются нормальному закону распределения, то, как это следует из (14), для всех $|v_j|$ веса постоянны:

$$w(v_j) = s^{-2}.$$

В 1959 и 1960 гг. $w(v_j)$ уменьшаются в зависимости от $|v_j|$ примерно в два-три раза. Заметим, что по (14) апостериорные веса можно определить не только для смешанного нормального распределения, но и для любого другого распределения, подставляя вместо функции $f(v)$ и ее производной $f'(v)$ их значения, найденные по графику или из аналитической аппроксимации. Для случая аппроксимации эмпирического распределения ошибок наблюдений опорных звезд кривой Пирсона VII типа [4] такие веса приведены в табл. 7.

Таблица 7

Уклонения $\|v_j\|$	Апостериорные веса		
	Метод Ньюкомба $w(v_j)$	$\frac{w(v_j)}{w(0)}$	Кривая Пирсона VII типа $w(v_j)'$
0.0	9.69	1.00	1.00
0.10	9.60	0.99	0.99
0.20	9.29	0.96	0.95
0.30	8.78	0.91	0.91
0.40	8.05	0.83	0.85
0.50	7.16	0 74	0.78
0.60	6.22	0.64	0.71
0.70	5.36	0.55	0.65
0.80	4.70	0.48	0.58
0.90	4.29	0.44	0.52
1.00	4.13	0.43	0.47
1.10	4.08	0.42	0.43
1.20	4.06	0.42	0.38
1.30	4.04	0.42	0.35
1.40	4.02	0.41	0.31
1.50	4.00	0 41	0.28
1.60	3.98	0.41	0.26
1.70	3.97	0.41	0.24
1.80	3.97	0.41	0.22
1.90	3.97	0.41	0.22

Следовательно, при обработке рядов наблюдений, распределение которых существенно отличается от нормального, оценки наиболее вероятных значений измеряемых величин нужно искать в виде (13), принимая во внимание апостериорные веса отдельных наблюдений. Последние также можно использовать для приведения уклонений v_{ij} в однородную систему

$$v'_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sqrt{w(v_{ij})}},$$

что очень важно для статистического анализа случайных ошибок наблюдений склонений.

3. Пример обработки наблюдений опорных звезд

Общее число опорных звезд, которые вошли в Голосеевский каталог, равно 177. Для нахождения наиболее вероятных значений склонений $\bar{\delta}$ этих звезд воспользуемся формулой (13) и системой апостериорных весов, приведенных в табл. 7. Вполне понятно, что средняя квадратическая ошибка новых оценок $\bar{\delta}$, найденная по внутренней сходимости (с учетом весов), существенно уменьшится. Возникает вопрос, как изменятся разности

$$\Delta\delta_1 = \delta_{\Gamma} - \delta_{FK3R},$$

которые приведены в Голосеевском каталоге, если вместо δ_{Γ} взять новые оценки $\bar{\delta}$,

$$\Delta\delta_2 = \bar{\delta} - \delta_{FK3R}.$$

Мы нашли следующие значения дисперсий:

$$D\{\Delta\delta_1\} = 0''.02740, \quad D\{\Delta\delta_2\} = 0''.02663.$$

Как видно, применение наиболее вероятных оценок незначительно уменьшает дисперсию ошибок наблюдений, найденную по внешней сходимости. Значения $\Delta\delta_1$ и $\Delta\delta_2$ отличаются друг от друга незначительно. Только в случае малого количества наблюдений эти отличия достигают до 0".06—0".08.

Наконец, важным преимуществом изложенного метода является использование всех имеющихся наблюдений без каких-либо критериев отбрасывания резко выделяющихся значений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харин А. С. — Каталог склонений звезд программ зенит-телескопов в системе FK4 для эпохи наблюдения и равноденствия 1950.0. Изд-во АН УССР, К., 1963.
2. Джунь И. В. — См. наст. сб.
3. Король А. К. Склонения ярких и слабых фундаментальных звезд в единой. «Наукова думка». К., 1969.
4. Идельсон Н. И. — Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. «Геодезиздат», М., 1947.
5. Cohen A. C. — Technometrics, 9, no 1, 1967.

ANALYSIS OF THE OBSERVATIONAL ERRORS OF THE GOLOSEYEVO CATALOGUE OF LATITUDE STARS. I

A. S. KHARIN, Ya. S. YATSKIV

Summary

The observational error distribution and estimation of the most probable values of stellar declinations are studied. It is shown that empirical distribution differs essentially from the normal and can be approximate well either by the compound normal distribution or by the Pearson curve of type VII.

ЗАВИСИМОСТЬ ДРОЖАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЗВЕЗД В ТЕЛЕСКОПАХ ОТ ЗЕНИТНОГО РАССТОЯНИЯ

И. Г. КОЛЧИНСКИЙ

(ГАО АН УССР, г. Киев)

Зависимость дрожания изображений звезд в телескопах является важной физической характеристикой оптической нестабильности земной атмосферы. Для характеристики астроклимата и оценки эффективности работы телескопов на различных зенитных расстояниях необходимо знать, на каких предельных зенитных расстояниях в среднем в данном