

12. Большев Л. Н., Смирнов Н. В. Таблицы математической статистики, «Наука». М., 1965.
 13. Вентцель Е. С. Теория вероятностей, М., 1962.
 14. Джуны И. В. — В кн.: Вопросы астрометрии, 4. «Наукова думка», К., 1968.

ON DISTRIBUTION FUNCTION OF THE ERRORS IN LATITUDE OBSERVATIONS

I. V. DZHUN

Summary

The method of small samples is used to test a hypothesis of the normal distribution of latitude differences obtained from concurrent observations with two zenith telescopes of Poltava and Mizusawa. It is shown that due to systematic errors the sample distribution function differs significantly from the normal one.

ОБ ОЦЕНКЕ СПЕКТРА ОШИБОК ШИРОТНЫХ НАБЛЮДЕНИЙ В ОБЛАСТИ ВЫСОКИХ ЧАСТОТ

В. Н. Корогвич, Я. С. Яцкiv

(ГАО АН УССР, г. Киев)

Постановка задачи

Наиболее полной характеристикой ошибок наблюдений широты, как временной случайной последовательности, является ее спектр мощности во всей области частот от 0 до π [1]. Вследствие неравномерности распределения наблюдений во времени этот спектр можно оценить только на отдельных неперекрывающихся интервалах частот. В работе [2] эти интервалы обозначены A , B , C и D , подробно изучен спектр ошибок по уклонениям нормальных значений от сглаженной кривой изменения широты (интервал C) в области периодов от 2 до 6 недель. Оценки спектра в интервале D , который соответствует неполярным изменениям широты, получены в [3—5]. В каждом из двух других интервалов спектральная плотность предполагалась постоянной [2]

$$S(\omega) = \text{const.}$$

Следовательно, ошибки наблюдений рассматривались как независимые случайные величины.

Существенно упрощая дальнейшие расчеты, такое предположение, если оно противоречит реальности, в значительной мере уменьшает количество информации, которое содержится в выполненных наблюдениях. Например, отвергается гипотеза о наличии каких-либо преобладающих источников ошибок, о значимости расхождений характеристик изменений широты в течение рассматриваемых интервалов времени и т. п.

Чтобы частично восполнить этот пробел, в настоящей работе на примере пулковских наблюдений широты по расширенной программе рассмотрена методика оценки и изучения спектра ошибок широтных наблюдений в интервале A (частоты от 4 до 52.5 цикла в сутки). При этом большое внимание уделяется аппроксимации суточных изменений широты.

Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — последовательность наблюденных в течение ночи широт в среднем через промежуток времени Δt . В общем случае

$\varphi(t_i)$ можно отнести к аддитивным нестационарным случайным последовательностям типа

$$\varphi(t_i) = \psi(t_i) + \xi(t_i), \quad (1)$$

где $\psi(t_i)$ — некоторая детерминированная функция, описывающая суточные изменения широты, $\xi(t_i)$ — стационарная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием

$$M\{\xi(t_i)\} = 0.$$

Так как

$$M\{\varphi(t_i)\} = \psi(t_i),$$

то очевидна нестационарность последовательности $\varphi(t_i)$ относительно математического ожидания.

Вид функции $\psi(t_i)$ до сих пор точно не установлен. Затруднения вызываются тем, что широтные наблюдения ведутся преимущественно ночью и в течение непродолжительных периодов времени. Спенсер Джонс, определив суточный член $-0''.015 \sin(\odot - a)$ в наблюдениях широты Гринвича, замечает: «Из предположения, что существуют прогрессивные изменения широты в течение ночи, не вытекает с необходимости, что эти изменения пропорциональны $\sin(\odot - a)$. Была сделана попытка исследовать, представляются ли изменения за времяочных наблюдений этим типом лучше, чем линейной зависимостью от времени. Сделать определенный вывод не удалось, так как невозможно по имеющемуся материалу предпочесть одну из этих зависимостей» [6]. В пулковских наблюдениях широты, выполненных по специальной расширенной программе, найден суточный член, близкий к $-0''.04 \sin(\odot - a + 2^h 0)$ [7]. В то же время суточные изменения широты Полтавы хорошо представляются параболой второго порядка [8].

Здесь предположим, что функция $\psi(t)$ достаточно гладкая, и представим $\varphi(t_i)$ в виде

$$\varphi(t_i) = \sum_{l=0}^m a_l u_l(t_i) + \xi(t_i), \quad (2)$$

где $u_l(t_i)$ — полиномы Чебышева, ортонормированные на системе взвешенных точек $t_i = 1, 2, 3, \dots, n$, a_l — неизвестные коэффициенты.

Таким образом, рассматриваемая нами задача разбивается на два этапа:

- 1) пользуясь методами регрессионного анализа, установить необходимое количество членов разложения (2) и оценить неизвестные коэффициенты a_l ;
- 2) выполнить статистический спектральный анализ уклонений

$$\xi(t_i) = \varphi(t_i) - \sum_{l=0}^m a_l u_l(t_i). \quad (3)$$

Регрессионный анализ суточных изменений широты

Напомним некоторые основные формулы регрессионного и корреляционного анализов [9, 10].

Пусть φ_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, d_i$) — наблюденные значения широты в течение некоторого промежутка времени. Если $d_i \gg 1$, то для каждого i -го среднего можно найти оценку дисперсии по формуле

$$s_i^2 = \frac{1}{d_i(d_i - 1)} \sum_{j=1}^{d_i} (\varphi_{ij} - \bar{\varphi}_i)^2 \quad (4)$$

и соответствующий нормированный вес

$$p_i = s_i^{-2} \left(\sum_{i=1}^n s_i^{-2} \right)^{-1} \quad (5)$$

По аналогии с [9] определим сводную оценку дисперсии

$$s_1^2 = \left(\sum_{i=1}^n s_i^{-2} \right)^{-1} \quad (6)$$

В нашем случае условие $d_i \gg 1$ не всегда удовлетворяется. Поэтому вместо (5) и (6) воспользуемся формулами

$$p_i = \frac{d_i}{N}, \quad (5')$$

$$s_1^2 = \frac{1}{N(N-n)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} (\varphi_{ij} - \bar{\varphi})^2, \quad (6')$$

$$\text{где } N = \sum_{i=1}^n d_i.$$

Оценив по совокупности данных общую дисперсию

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} (\varphi_{ij} - \bar{\varphi})^2, \quad (7)$$

$$\text{где } \bar{\varphi} = \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i,$$

в дальнейшем будем пользоваться рядом i -х средних φ_i с весами p_i , которые соответствуют моментам времени $t_i = 1, 2, \dots, n$.

a) Предварительный анализ

Прежде чем приступить к определению параметров разложения (2), следует выяснить, существует ли вообще зависимость между переменными φ_i и t_i . Для этой цели в математической статистике пользуются коэффициентом корреляции r (в случае прямолинейной зависимости) или корреляционным отношением ρ (в случае криволинейной зависимости).

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n p_i \varphi_i t_i - \bar{\varphi} \bar{t}}{\sqrt{s_1^2 s^2}}, \quad (8)$$

$$\rho = \frac{n s_2^2}{s^2}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} s_2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i (\varphi_i - \bar{\varphi})^2, \\ \bar{t} &= \sum_{i=1}^n p_i t_i, \\ s_t^2 &= \sum_{i=1}^n p_i (t_i - \bar{t})^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для проверки гипотезы об отсутствии корреляционной связи ($r=0$ или $\rho=0$) существует простой критерий. Он основан на том, что распределение выборочных значений r или ρ близко к нормальному. Гипотеза принимается, если

$$t_1 = \frac{|r| \sqrt{N-2}}{1-r^2} < t_\beta(N-2)$$

или

$$t_2 = \frac{\rho \sqrt{N-2}}{1-\rho^2} < t_\beta(N-2).$$

Здесь $t_\beta(N-2) = 100\beta$ -процентная точка распределения Стьюдента с $N-2$ степенями свободы. Уровень значимости выбирается равным $0.01 \sim 0.10$ в зависимости от требований задачи.

В случае линейной зависимости корреляционное отношение и коэффициент корреляции совпадают. Разность ($\rho^2 - r^2$) можно использовать для проверки гипотезы линейности. Доказано, что если эта гипотеза справедлива, величина

$$W^2 = \frac{(N-n)(\rho^2 - r^2)}{(n-2)(1-\rho^2)}$$

распределена по закону $F(n-2, N-n)$. Принцип использования этого критерия аналогичен описанному: задаемся достаточно малым уровнем значимости β , находим 100β -процентную точку F -распределения и сравниваем W^2 с V_β^2 . Если $W^2 > V_\beta^2$, то гипотеза о линейном виде зависимости считается статистически необоснованной. Значения 100β -процентных точек F -распределения и распределения Стьюдента имеются в [9--11].

б) Построение линий регрессии

Предположим, что наличие связи между переменными φ_i и t_i установлено. Теперь приступим к оценке коэффициентов разложения (2). Заметим, что $u_l(t_i)$ — система полиномов, ортонормированных не на каком-либо отрезке изменения независимой переменной, а на системе взвешенных точек:

$$u_l(t_i) = \frac{U_l(t_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i U_l^2(t_i)}}. \quad (11)$$

Здесь $U_0(t_i) = 1$,

$$U_l(t_i) = t_i^l - \sum_{i=1}^n p_{it_i} U_0(t_i) - \dots$$

$$\dots - \frac{\sum_{i=1}^n p_{it_i} U_{l-1}(t_i)}{\sum_{i=1}^n p_i U_{l-1}^2(t_i)} \cdot U_{l-1}(t_i),$$

где $l = 1, 2, \dots, m$.

Коэффициенты a_l разложения (2) определяются из равенства

$$a_l = \sum_{i=1}^n p_i u_l(t_i) \cdot \varphi_i \quad (12)$$

и соответствуют принципу метода наименьших квадратов:

$$s_2^2(m+1) = \frac{1}{n-m-1} \sum_{i=1}^n p_i [\varphi_i - a_0 - a_1 u_1(t_i) - \dots - a_m u_m(t_i)]^2 = \min \quad (13)$$

в случае нормальности и независимости ошибок наблюдений. Последнее нам неизвестно и выяснится лишь в результате анализа уклонений

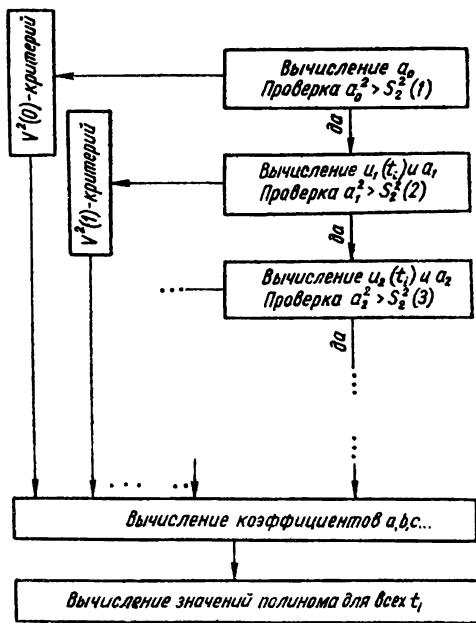


Рис. 1.

$\xi(t_i)$. Поэтому в дальнейшем будем формально пользоваться оценками метода наименьших квадратов, учитывая, что многие хорошие свойства этих оценок сохраняются при нарушении условий нормальности и независимости.

Проверка значимости членов разложения (2) производится по v^2 -критерию, а именно: вычисленное значение $v^2(l) = \frac{s_2^2(l)}{s_1^2}$, $l=0, 1, \dots, m+1$ сравнивается с табличными

$$v_{\beta}^2(n-l, N-n) \text{ и } v_{1-\beta}^2(n-l, N-n).$$

Если неравенство $v_{1-\beta}^2(n-l, N-n) < v^2(l) < v_{\beta}^2(n-l, N-n)$ выполняется или нарушено слева, то следует ограничиться разложением до $l-1$ члена. В случае нарушения справа рассматриваемого неравенства следует включить l -й член в (2). По аналогии с [9] нами составлена программа для ЭЦВМ М-220. На рис. 1 приведена блок-схема программы регрессионного анализа последовательностей ϕ_i . Как видно из блок-схемы, сначала проверяется условие

$$s_2^2(l+1) < a_l^2.$$

Если оно выполняется, то вычисляется следующий член разложения (2). В противном случае совершается переход к v^2 -критерию для окончательной проверки значимости рассматриваемого члена разложения.

в) Сравнение линий регрессии

Строгое в статистическом смысле сравнение линий регрессии позволяет ответить на вопрос, является ли расхождение между ними лишь следствием случайных ошибок или же они описывают две существенно различные регрессионные зависимости.

Пусть на основании двух выборок объемов N_1 и N_2 построены две эмпирические прямые регрессии

$$\begin{aligned}\phi^I(t_i) &= a_0^I + a_1^I u_1^I(t_i), \\ \phi^{II}(t_i) &= a_0^{II} + a_1^{II} u_1^{II}(t_i).\end{aligned}$$

Прежде всего с помощью соотношения $v^2 = \frac{s^2}{s_2^2(l)}$ проверяется гипотеза незначимого расхождения дисперсий s^2 и $s_2^2(l)$, которые вычисляются по формулам, аналогичным (7),

$$s^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} \{\phi_{ij} - a_0 - a_1 u_1(t_i)\}^2. \quad (14)$$

Если окажется, что

$$v_{1-\beta}^2(N_1-2, N_2-2) < v^2 < v_{\beta}^2(N_1-2, N_2-2),$$

то гипотеза незначимого расхождения принимается и находится сводная оценка

$$s^2 = \frac{(N_1-2)s_2^{2(I)} + (N_2-2)s_2^{2(II)}}{N_1 + N_2 - 4}. \quad (15)$$

Затем, если

$$\begin{aligned}|a_1^I - a_1^{II}| &< T_{\beta} = t_{\beta}(N_1 + N_2 - 4) s \times \\ &\times \sqrt{\frac{1}{N_1 \sum_{i=1}^n \{U_1^I(t_i)\}^2} + \frac{1}{N_2 \sum_{i=1}^n \{U_1^{II}(t_i)\}^2}},\end{aligned}$$

то принимается гипотеза равенства коэффициентов a^I_1 и a^{II}_1 . В нашем случае изменения постоянного члена a_0 характеризуют полярные изменения широты, и в дальнейшем гипотеза равенства a^I_0 и a^{II}_0 не проверяется. Аналогичные рекомендации могут быть даны для случая значимого расхождения дисперсии, а также для полиномов более высокого порядка. Соответствующие формулы, которыми мы пользовались, приводятся в [10].

Статистический спектральный анализ уклонений $\xi(t_i)$

Каждую конкретную последовательность уклонений $\xi_v(t_i)$ будем считать выборкой из некоторой стационарной случайной последовательности. Оценим спектр мощности каждой выборки по формулам Тюки [1, 17]. Естественно, что различные выборки могут дать разные оценки спектра. Если стационарная случайная последовательность $\xi(t_i)$ подчиняется нормальному распределению, а выборки производятся случайно, то эмпирические оценки спектральной плотности должны приблизенно подчиняться χ^2 -распределению с числом степеней свободы

$$\bar{f} = \sum_{v=1}^q f_v, \text{ где } f_v = \frac{2n_v}{m'} - \frac{1}{2} \quad \text{— число степеней свободы при оценке спектра}$$

по одной выборке, q — число выборок, n_v — число исходных значений в выборке $\xi_v(t_i)$, m' — число значений корреляционной функции, взятое для спектрального разложения. Отсюда можно найти доверительные интервалы для спектральной плотности $S(\omega)$. Следовательно, прежде всего нужно убедиться в том, что выборки $\xi_v(t_i)$ распределены нормально; затем для каждой из них найти оценку спектра $S_v(\omega)$. Осредненная по всем выборкам оценка

$$\overline{S(\omega)} = \sum_{v=1}^q S_v(\omega) \quad (16)$$

является несмещенной и состоятельной оценкой спектра ошибок широтных наблюдений в области высоких частот.

Материал широтных наблюдений и его первичная обработка

А. К. Король предоставил нам результаты пулковских наблюдений широты по расширенной программе, которые приведены им в единую систему склонений и исправлены за неточность принятого значения цены оборота винта окулярного микрометра.

Мы воспользовались годичной серией этих наблюдений (1915.9—1916.9 гг.). Ради уменьшения количества вычислений нами принят следующий способ обработки. Прежде всего годичная серия наблюдений разбивалась на 10-суточные интервалы, которые соответствовали принятым в [12] нормальным значениям. Предполагалось, что характер суточных вариаций широты сохранялся неизменным на протяжении одного такого интервала, находились средние значения широты по каждой паре. При этом неравномерность распределения пар по прямому восхождению и изменения среднего момента наблюдений пары за 10 суток не учитывались. В результате мы получили ряд последовательностей $\phi_{vi}(v=1, 2, \dots, q, i=1, 2, \dots, n)$ с весами, пропорциональными количеству осредненных широт, из которых 33 оказались пригодными для дальнейшего анализа. В широты ϕ_i вносились все известные поправки, влияние которых превосходит $0''.002$:

1) поправка за неточность принятой постоянной aberrации

$$\Delta\varphi = 0''.0206 \sin \alpha \cos \odot - 0.0052 \cos \odot - 0.0225 \cos \alpha \sin \odot;$$

2) поправка за aberrацию от Юпитера и Сатурна [13];

3) поправка за колебание отвеса из-за возмущающего действия Солнца [14]. Аналогичная поправка из-за возмущающего действия Луны не учитывалась, так как благодаря осреднению за 10 суток она близка к $0''.002$;

4) поправка из-за неучета месячной составляющей aberrации звезд, зависящая от движения Земли около центра тяжести Земля—Луна [13]. С учетом осреднения широт

$$\Delta\varphi = -0''.0052 \sin(\epsilon - \alpha);$$

5) из членов Оппольцера, принимая во внимание способ вывода системы склонений и определение широт, остается учесть

$$\Delta\varphi = 0.0022 \sin(\alpha - 2\odot);$$

6) поправка из-за влияния годовой неполярной волны Пулкова на систему склонений пар расширенной программы.

В [12] показано, что волна вида $c \sin \alpha$ в поправках склонений, выведенных А. К. Королем из самих широтных наблюдений, может вызываться наличием годовой неполярной волны в наблюдениях Пулкова. Следующая проверка убеждает нас в необходимости учета указанной поправки.

Годовая неполярная волна, найденная нами по данным А. К. Короля,

$$Z = 0''.014 \sin(36^\circ t + 94^\circ)$$
$$\pm 3 \quad \pm 12$$

и представляет собой только остаток от полной волны из-за действия преобразования, принятого при выводе системы склонений [12]. Учитывая амплитудный множитель 0.36, находим истинную годовую волну:

$$Z = 0''.039 \sin(36^\circ t + 94^\circ).$$
$$\pm 8 \quad \pm 12 \quad (17)$$

Выражение (17) приблизительно совпадает с результатом, полученным А. Я. Орловым по отдельным рядам пулковских наблюдений [15]. Вклад волны (17) в поправки склонений равен

$$\Delta\delta' = -0''.039 \times 0.64 \sin(36^\circ t + 94^\circ) = 0.025 \sin(\alpha + 174^\circ). \quad (18)$$

С другой стороны, в поправках склонений, найденных А. К. Королем из самих широтных наблюдений, содержится волна

$$\Delta\delta_K = 0''.034 \sin(\alpha + 222^\circ), \quad (19)$$
$$\pm 21 \quad \pm 35$$

а в разностях поправок склонений, выведенных А. К. Королем и А. Д. Дроздом,

$$\Delta(\delta_K - \delta_D) = 0''.021 \sin(\alpha + 216^\circ). \quad (20)$$
$$\pm 10 \quad \pm 27$$

Согласие выражений (18) и (20) удовлетворительное. В значения широты φ , мы ввели поправки, соответствующие выражению (20).

Численные результаты

Прежде всего для каждого 10-дневного интервала наблюдений по (6) были вычислены оценки дисперсии Ns_1^2 , характеризующие внутреннюю сходимость наблюдений. Они приведены в табл. 1, где даны также результаты проверки значимости расхождений Ns_1^2 внутри каждого

Таблица 1

Год	Месяц	№ интервала	N	n	Ns_1^2 в ($0''/01$) ²	$v^2 = \frac{(Ns_1^2)_6}{(Ns_1^2)_m}$	$v_{0.05}^2$	$v_{0.01}^2$ в в ($0''/01$) ²	s^2 в ($0''/01$) ²
1915	XI—XII	1	59	42	332.618				6.965
		2	122	62	433.708			410.945	3.368
		3	22	19	129.667				11.107
		4	84	64	451.425	3.47	8.66	26.7	4.892
		5	9	7	—				
1916	I	6	65	36	377.656	1.24	1.64	2.01	326.661
	I	7	127	60	304.588				5.026
	II	8	—	—	—				2.572
	II	9	—	—	—				
	II	10	84	52	256.600				3.055
III	III	11	70	38	88.940				1.271
	III	12	33	33	—				6.708*
	III	13	120	48	264.530	2.97	1.71	2.15	2.061
	III	14	232	48	170.453				0.735
	IV	15	123	44	173.988				1.414
V	IV	16	260	40	285.743	1.64	1.39	1.57	1.099
	V	17	124	33	214.008	1.44	1.76	2.24	1.625
	V	18	52	25	148.819				201.539
	V	19	148	32	204.028	1.37	1.72	2.21	3.876
	VI	20	130	28	206.745	1.18			1.362
VI	VI	21	80	29	174.764				1.677
	VI	22	105	31	263.391	1.51	1.57	1.72	218.026
	VI	23	133	30	242.300	1.34	1.43	1.66	2.725
	VII	24	113	31	180.168				2.076
	VII	25	29	22	437.286	2.43	2.14	2.90	1.676
VIII	VII	26	94	35	254.887	1.54	1.58	1.93	1.972
	VIII	27	150	40	197.780				7.685
	VIII	28	85	36	165.122				2.190
	VIII	29	90	44	218.815	1.60	1.49	1.76	1.373
	IX	30	155	48	136.538				2.422
IX	IX	31	144	52	306.047	2.24	1.41	1.63	0.881
	IX	32	77	49	163.762				2.125
	X	33	59	42	102.529				2.142
	X	34	48	34	243.405	2.37	2.33	3.36	2.796
	X	35	51	41	390.300	6.07	5.96	14.55	3.437
XI	XI	36	127	72	314.346	4.89	5.70	13.70	6.095
	XI	37	44	40	64.250				2.448

* Это значение получено по среднему значению \overline{Ns}_1^2 .

месяца. Если отношение большего значения дисперсии к меньшему удовлетворяет неравенству

$$v^2 = \frac{(Ns_1^2)_6}{(Ns_1^2)_m} < v_{\beta}^2$$

то расхождения между значениями Ns_1^2 незначимы. В таком случае находилась сводная для данного месяца оценка

$$\overline{Ns}_1^2 = \frac{(N-n)_1 \cdot (Ns_1^2)_1 + (N-n)_2 (Ns_1^2)_2 + (N-n)_3 (Ns_1^2)_3}{(N-n)_1 + (N-n)_2 + (N-n)_3}$$

и соответственно

$$s_1^{2(v)} = \frac{Ns_1^2}{N_v}.$$

Значимые расхождения дисперсий получились в марте, апреле и сентябре. Для этих месяцев характерна неустойчивость метеорологических процессов, что, вполне возможно, проявляется и в результатах широтных наблюдений. Представляет интерес дальнейшая проверка гипотезы равенства среднемесячных значений дисперсии (см. табл. 2), проведенная нами с помощью критерия Бартлетта [11]. В табл. 3 для различного количества сравниваемых дисперсий приведены результаты применения этого критерия.

Подтверждается высказанное предположение о неустойчивости дисперсии в переходные месяцы, что позволяет сделать следующие выводы:

- а) дисперсия ошибок наблюдений широты значительно меняется в течение года;
- б) значения дисперсии, определенные по летним наблюдениям, примерно в полтора раза меньше соответствующих зимних значений;
- в) на протяжении лета и зимы расхождения дисперсий несущественны.

На основании результатов предварительного анализа последовательностей широт ϕ_i (см. табл. 4) можно заключить, что в 15 случаях обнаруживается значимая линейная зависимость, которая, согласно критерию W^2 , достаточно хорошо представляет наблюденные значения широты. Для всех последовательностей ϕ_i корреляционное отношение свидетельствует о значимости связи, что, однако, в дальнейшем не подтвердилось. По нашему мнению, причина этого — в неточности определения Q , так как частные средние иногда находились по малому числу наблюдений.

Таблица 2

№ дисперсии	$N s_1^2$ в $(0''.01)^2$	Число степеней свободы
XII	410.945	100
I	326.661	95
II	256.600	32
III ₁	88.940	32
III ₃	264.530	72
IV ₁	170.453	184
IV ₂	173.988	79
IV ₃	285.743	220
V	201.539	234
VI	218.026	227
VII	222.873	192
VIII	205.895	218
IX ₁	218.815	46
IX ₂	136.538	107
IX ₃	306.047	92
X	164.976	61
XI	310.860	69

Таблица 3

Последовательность дисперсий	N_B	M	$M_{0.01}$ для всех c_1	Расхождение дисперсий
Полная XII, I ... X, XI	2061	81.00	Меньше 50	Значимо
XII, I, II	228	3.00	Больше 9	Незначимо
XII, I, II, III ₁ , III ₃	332	23.10	Меньше 16	Значимо
II, III ₁ , III ₃	163	11.61	Меньше 10	"
IV ₁ , IV ₂ , IV ₃ ... VIII, IX ₁	1400	17.30	Больше 18	Незначимо
IV ₁ , IV ₂ , IV ₃ ... VIII, IX ₁ , IX ₂	1507	26.10	Меньше 22	Значимо
IV ₁ , IV ₂ , IV ₃	483	15.70	Меньше 10	"
V, VI ... IX ₁	917	0.60	Больше 13	Незначимо
IX ₃ , X, XI	222	7.80	Больше 9	"
IX ₁ , IX ₂ , IX ₃	245	16.00	Меньше 10	Значимо
XII, I, II, IX ₃ , X, XI	450	14.90	Больше 15	Незначимо

В табл. 4 указан критерий, согласно которому определялась значимость коэффициентов a_l разложения (2). Заслуживает внимания тот факт, что во многих случаях, когда справедливо неравенство $a_l^2 > s_2^2(l+1)$, критерий v^2 отвергал гипотезу о включении члена $a_l u_l(t_i)$ в разложение (2).

№ интер- вала	ns^2 $(0''.01)^2$	r	t_1	$t_{0.025}$	$t_{0.10}$	Q^2	t_2	W^2
1	249.078	-0.046	0.347	2.00		0.724	2.33	1.113
2	298.806	+0.045	0.498	1.98		0.584	2.01	1.399
4	277.342	-0.024	0.216	1.99		0.574	16.10	0.434
6	181.971	+0.193	1.593	2.00	1.29	0.519	11.89	0.853
7	163.645	-0.184	0.206	1.98		0.509	16.26	1.198
10	91.293	+0.092	0.837	1.99		0.483	12.17	0.587
11	95.169	+0.135	1.137	2.01	1.30	0.704	23.35	2.057
12	181.102	+0.271	1.628	2.03	1.31	—	—	—
13	91.898	-0.334	4.094	1.98		0.369	10.46	0.638
14	46.174	-0.040	0.604	1.97		0.255	10.27	1.358
15	59.033	-0.063	0.702	1.98		0.332	9.48	0.922
16	26.348	-0.048	0.767	1.97		0.098	5.58	0.616
17	44.570	-0.068	0.756	1.98		0.226	6.78	0.839
18	127.961	+0.020	0.142	2.00		0.627	15.02	1.974
19	37.489	-0.028	0.338	1.98		0.190	6.50	0.902
20	62.887	-0.009	0.096	1.98		0.279	8.30	1.521
21	52.997	+0.168	1.531	1.99	1.29	0.310	7.14	0.773
22	62.948	+0.001	0.011	1.98		0.253	6.83	0.863
23	77.648	+0.373	4.961	1.98		0.345	10.28	1.159
24	80.486	+0.226	2.512	1.98		0.381	10.51	1.506
25	151.523	-0.304	1.746	2.04	1.31	0.590	9.72	0.424
26	71.307	+0.199	1.987	1.98		0.307	7.66	0.689
27	46.698	+0.011	0.132	1.98		0.243	7.92	0.929
28	45.535	-0.166	1.558	1.99	1.29	0.323	7.65	0.629
29	82.283	+0.381	4.184	1.99	1.29	0.424	10.61	0.530
30	67.627	+0.067	0.837	1.98		0.417	13.71	1.648
31	121.167	-0.048	0.574	1.98		0.383	11.94	1.134
32	103.052	+0.268	2.496	1.99	1.29	0.629	18.50	0.894
33	145.961	+0.195	1.527	2.00	1.29	0.810	35.86	1.732
34	88.795	-0.011	0.072	2.01		0.558	11.47	0.552
35	229.421	-0.053	0.372	2.01		0.743	23.54	0.741
36	123.320	+0.157	1.800	1.98	1.28	0.462	14.11	0.668
37	193.563	+0.163	1.086	2.02	1.30	0.958	151.43	2.340

a_0, b, c, d — коэффициенты разложения по степеням t .

Такая ситуация может возникнуть, если оценка s^2 , недостаточно надежна. Совместное применение обоих критериев позволяет хорошо представить зависимость φ_i от времени наблюдений. Для 16 последовательностей эта зависимость существует, причем в трех случаях для ее описания требуется полином третьей степени. Даже при беглом рассмотрении определенных для различных интервалов коэффициентов a_1, a_2, a_3 легко заметить их большие расхождения. Для отдаленных друг от друга последовательностей φ_{vi} причиной этих расхождений могут быть ошибки склонений. Различие же соседних линий регрессии свидетельствует о неустойчивости суточных изменений широты. Приведем примеры сравнения эмпирических линий регрессии для близких интервалов наблюдений.

Пример I.

$$\varphi_i^{(23)} = 1.63 + 5.994 u_1^{(23)}(t_i),$$

$$\varphi_i^{(26)} = 13.09 + 3.034 u_1^{(26)}(t_i).$$

По формуле (14) находим:

$$s^2(23) = 206.12, \quad s^2(26) = 231.07.$$

Таблица 4

$v_{0.025}^2$	в $a_0'''.01$	в $a_1'''.01$	в $a_2'''.01$	в $a_3'''.01$	Критерий	b	c	d
	28.62	—	—		v^2	—	—	—
	22.60	—	—		v^2	—	—	—
	11.38	—	—	—	v^2	—	—	—
2.01	7.13	+3.620	-3.957	—	$s_2^2 < a_t^2$	-5.096	-0.817	
	4.25	—	—	—	v^2	—	—	—
2.02	— 7.12	—	—	—	v^2	—	—	—
	- 7.16	+1.574	+0.541	—	v^2	+0.506	+0.052	
	- 7.36	+3.647	+2.946	-3.260	$s_2^2 < a_t^2$	+5.272	+0.155	-0.338
1.74	- 8.88	-5.280	—	—	$s_2^2 < a_t^2$	-1.800	—	—
	-16.53	—	—	—	v^2	—	—	—
	-13.85	—	—	—	v^2	—	—	—
	-10.36	—	—	—	v^2	—	—	—
	-17.90	—	—	—	v^2	—	—	—
	-14.30	—	—	—	v^2	—	—	—
	-13.68	—	—	—	v^2	—	—	—
	- 7.85	—	—	—	v^2	—	—	—
2.03	- 6.65	+2.200	-2.030	+2.428	$s_2^2 < a_t^2$	-1.359	-0.131	+0.320
	- 2.94	—	—	—	v^2	—	—	—
1.88	+ 1.63	+5.594	—	—	$s_2^2 < a_t^2$	+3.226	—	
1.90	+ 5.30	+3.288	-2.870	—	v^2	+3.179	-0.915	
3.01	+16.98	-4.886	-5.171	—	$s_2^2 < a_t^2$	-1.017	-2.464	
1.93	+13.09	+3.034	—	—	$s_2^2 < a_t^2$	+1.388	—	
	+20.93	—	—	—	v^2	—	—	—
1.91	+22.97	-1.974	—	—	$s_2^2 < a_t^2$	-0.885	—	—
1.85	+25.36	+5.308	+1.516	-1.278	$s_2^2 < a_t^2$	+2.825	+0.207	-0.066
	+30.90	+0.858	-1.284	—	v^2	-0.003	-0.160	—
	+34.35	—	—	—	v^2	—	—	—
1.90	+32.27	+3.426	—	—	$s_2^2 < a_t^2$	+1.118	—	—
2.13	+38.41	+2.612	—	—	v^2	+0.798	—	—
	+44.48	—	—	—	v^2	—	—	—
	+38.11	—	—	—	v^2	—	—	—
1.66	+40.06	+2.564	—	—	$s_2^2 < a_t^2$	+0.606	—	
8.42	+33.56	+1.978	—	—	$s_2^2 < a_t^2$	+0.612	—	

Так как $v^2 = 1.125 < v_{0.025}^2 = 1.45$, находим сводную оценку $s^2 = 216.413$. Затем находим

$$|a_1^{(23)} - a_1^{(26)}| = 2.960,$$

$$T_{0.025} (1) = 1.971.$$

Следовательно, гипотеза равенства коэффициентов $a_1^{(23)}$ и $a_1^{(26)}$ противоречит наблюденным данным.

Пример II.

$$\varphi_i^{(24)} = 5.30 + 3.288 \mu_1^{(24)}(t_i) - 2.870 \mu_2^{(24)}(t_i),$$

$$\varphi_i^{(25)} = 16.98 - 4.886 \mu_1^{(25)}(t_i) - 5.171 \mu_2^{(25)}(t_i),$$

$$s^2{}^{(24)} = 195.147, \quad s^2{}^{(25)} = 217.518,$$

$$v^2 = 1.115 < v_{0.025}^2 = 1.760.$$

Сводная оценка дисперсии $s^2 = 199.423$.

Так как

$$|a_2^{(24)} - a_2^{(25)}| = 2.30 < T_{0.025} (2) = 3.77,$$

расхождение коэффициентов при полиноме второй степени незначимо. По формулам, приведенным в [10], находим величину $|a_2 - a'_2|$, где a_2 — сводная оценка коэффициента при полиноме второй степени при условии равенства $a_2^{(24)}$ и $a_2^{(25)}$, a'_2 — та же оценка при условии равенства $a_1^{(24)}$ и $a_1^{(25)}$:

$$|a_2 - a'_2| = 59.01 > T'_{0.025} (2) = 34.07.$$

Это значит, что коэффициенты при полиноме первой степени существенно различаются. Следовательно, гипотеза о незначимом расхождении $\varphi_i^{(24)}$ и $\varphi_i^{(25)}$ должна быть отвергнута.

Таблица 5

k	Частота, цикл/сутки	$S_0(k)$	$S_1(k)$	$S_2(k)$	$S_3(k)$	$S(k)$
2	4.0	0.0493	0.0270	0.0146	0.0354	0.0377
3	6.1	366	493	225	583	392
4	8.1	325	631	296	543	408
5	10.1	363	646	490	790	485
6	12.1	357	526	617	707	467
7	14.1	388	407	429	305	390
8	16.2	419	319	396	216	374
9	18.2	389	346	530	447	407
10	20.2	388	421	523	574	434
11	22.2	445	406	505	342	436
12	24.2	419	405	691	271	445
13	26.3	323	373	602	479	392
14	28.3	237	339	443	432	310
15	30.3	251	335	369	311	284
16	32.3	335	396	294	318	341
17	34.3	410	385	455	362	407
18	36.4	469	395	648	288	464
19	38.4	442	426	358	177	401
20	40.4	335	288	360	197	315
21	42.4	280	223	411	579	316
22	44.4	320	278	343	601	340
23	46.5	418	375	335	388	392
24	48.5	538	520	457	405	508
25	50.5	591	501	398	298	514
26	52.5	0.0479	0.0391	0.0260	0.0167	0.0396
f	—	47.4	20.4	11.0	6.6	85.4

Из изложенного следует, что характер суточных изменений широты, обнаруживая общую тенденцию к возрастанию широт от вечера к утру, значимо изменялся на протяжении рассмотренного нами периода наблюдений.

Переходим теперь к статистическому спектральному анализу уклонений $\xi(t_i)$, полученных в результате исключения из последовательностей φ_i суточных изменений широты. Учитывая значимость расхождения значений дисперсии $D\xi(t_i)$, найденных по различным интервалам наблюдений, воспользуемся в дальнейшем нормированными величинами $\xi'(t_i) = \xi(t_i) / \sqrt{D\xi(t_i)}$. При этом последние будем считать равноточными, пренебрегая различиями p_i .

Для проверки гипотезы нормальности $\xi'(t_i)$ удобно воспользоваться критерием, предложенным в [16] для совокупности малых выборок. С этой целью мы сохраним в каждой последовательности $\xi'(t_i)$ одинаковое число значений $n=25$ ($t_i=1, 2, \dots, 25$) и проверим гипотезу по множеству первых и тринадцатых значений. В обоих случаях, согласно критерию Колмогорова, гипотеза нормальности распределения не противоречит данным наблюдений.

В табл. 5 приведены результаты вычисления спектров мощности последовательностей $\xi'(t_i)$ по известным формулам Тюки, принимая

число значений корреляционной функции $m'=26$. В графах 3—6 даны усредненные по всем однотипным последовательностям значения спектральной плотности $\overline{\overline{S}}(k)$. Под однотипными подразумеваем такие последовательности, которые получены в результате исключения из фаз суточных изменений широты, представляющихся полиномом одной и той же степени. Различия значений $\overline{\overline{S}}(k)$, вызванные неодинаковой степенью аппроксимирующего полинома, могут быть только в низкочастотной области $k=1, 2, 3$ и 4. Как видно из табл. 5, они незначительны. В последней граfe приводятся осредненные по всем последовательностям значения спектральной плотности $\overline{\overline{S}}(k)$. Последние показаны на

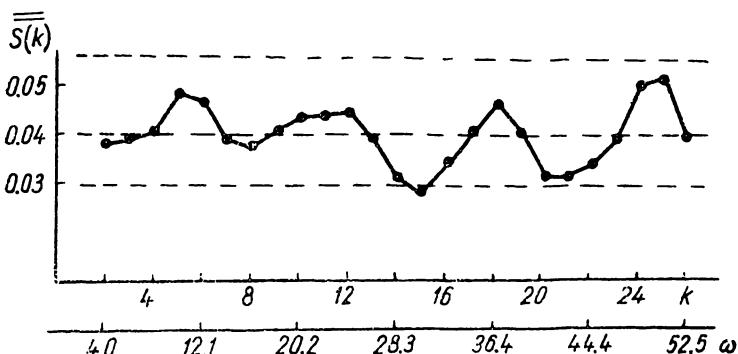


Рис. 2.

рис. 2. Три прямые здесь соответствуют среднему по всем частотам значению спектральной плотности и его 95%-ному доверительному интервалу (0.76—1.40) [17]. В этом интервале находятся все вычисленные нами значения спектральной плотности. Таким образом, можно принять $S(k)=0.0400$. К такому же выводу приходим в результате проверки следующей гипотезы. Пусть генеральная совокупность характеризуется средней спектральной плотностью $\overline{\overline{S}}(k)=0.0400$ на частоте 50.5 цикла в сутки. Тогда вероятность того, что выборка может дать оценку

$$\chi^2_{0.05} \cdot \overline{\overline{S}}(k) / f = 0.504$$

и более, — всего 5%. Фактически полученная нами оценка $\overline{\overline{S}}(25) = 0.0514$ лишь незначительно отличается от приведенного 5%-ного уровня χ^2 -распределения.

Замечание о выборе функции для аппроксимации суточных изменений широты

Мы уже отмечали, что для описания суточных изменений широты чаще всего пользуются отрезком синусоиды $c \sin(\Theta - a)$ или линейной функцией времени $a_1 t \Theta$. Можем ли мы отдать предпочтение определенному виду зависимости или они равноправны при данных условиях наблюдений?

Чтобы ответить на этот вопрос, предположим, что изменение широты в течение ночи имеет вид

$$\psi(t) = c \sin(\Theta - a).$$

Для аппроксимации такой функции полиномами Чебышева необходимо взять около 8 членов разложения (2). Мы же, быть может в силу

больших случайных ошибок наблюдений и несовершенства принятых критериев, нашли, что суточные изменения широты хорошо представляются полиномами нулевой или первой степени (25 случаев из 33). Каким образом отразится этот факт в спектре мощности уклонений $\xi'(t_i)$? Легко показать, что

$$S(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega),$$

где $S_1(\omega)$ — спектр случайных уклонений, $S_2(\omega)$ — обычный спектр отрезка синусоиды (рис. 3, 1) или спектр процесса $\eta(t) = c \sin(\Theta - \alpha) - a_1 t \Theta$ (рис. 3, 2), равный

$$S_2(\omega) = \frac{1}{T^2} \left\{ \frac{c \sin [\omega - (\Theta - \alpha)] T}{[\omega - (\Theta - \alpha)]} - \frac{c \sin [\omega + (\Theta - \alpha)] T}{[\omega + (\Theta - \alpha)]} + \right. \\ \left. + \frac{2a_1}{\omega} T \cos \omega T - \frac{2a_1}{\omega^2} \sin \omega T \right\}^2 \quad (21)$$

Формула (21) получена для случая равной продолжительности вечерних и утренних наблюдений $T_{\text{в}} = T_{\text{у}} = T$. Спектры, представленные на

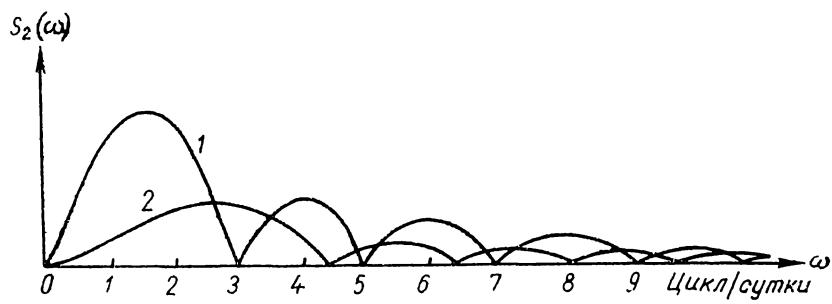


Рис. 3.

рис. 3, значительно отличаются по общей энергии. Однако, учитывая нормировку и уменьшение разрешающей способности, принятые нами при вычислении спектров уклонений $\xi'(t_i)$, находим, что кривые 1 и 2

(см. рис. 3) совпадают, и характерной их особенностью является плавное понижение с возрастанием частоты (рис. 4). Если принятое нами предположение о виде зависимости широты от времени наблюдений соответствовало бы действительности, то в вычисленном спектре мощности уклонений $\xi'(t_i)$ также должно обнаруживаться заметное уменьшение спектральной плотности с частотой. На самом деле мы убедились в правильности гипотезы $S(k) = \text{const}$.

Это означает, что отклонения изменений широты в течение ночи от линейной функции, если таковые вообще существуют, небольшие, т. е. их общая энергия значительно меньше уровня $S_1(\omega)$. Следовательно, при обработке материала наблюдений по принятой нами схеме можно отдать предпочтение аппроксимации суточных изменений широты полиномами Чебышева.

Заключение

Из приведенных результатов регрессионного и спектрального анализов следует, что последовательности наблюденных в течение ночи широт можно отнести к классу аддитивных нестационарных случайных последовательностей типа (1). Отметим, что

- a) применяя строгие статистические критерии, для аппроксимации суточных изменений широты, можно пользоваться любой ортогональной системой функций. Мы не получили каких-либо сведений в пользу зависимости вида $c \sin(\Theta - a)$;
- б) дисперсия случайных ошибок наблюдений и параметры разложения по полиномам Чебышева, найденные нами по различным интервалам наблюдений, существенно отличаются друг от друга;
- в) спектр мощности нормированных случайных уклонений $\xi'(t_i)$ представляет собой спектр так называемого белого шума

$$S(\omega) = \text{const.}$$

В заключение заметим, что сделанные выводы следует учитывать при построении сглаженных кривых аналитическим методом и сравнений данных широтных наблюдений с различными геофизическими эффектами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глаголева И. И., Яцкин Я. С. — В кн.: Анализ результатов широтных наблюдений. «ФАН», Ташкент, 1966, 8—16.
2. Глаголева И. И. — В кн.: Изменяемость широт. «Наукова думка», 1965, 59—69.
3. Яцкин Я. С. — В кн.: Изменяемость широт. «Наукова думка», 1965, 75—95.
4. Майор С. П. — В кн.: Изменяемость широт. «Наукова думка», 1967, 33—37.
5. Яцкин Я. С. — В кн.: Анализ результатов широтных наблюдений. «ФАН», Ташкент, 1966, 17—25.
6. H. Spencer Jones. Observations made with the Cookson floating zenith telescope in the years 1911—1936, London, 1939.
7. Берг В. Р. — Труды Главной астрономической обсерватории в Пулкове, 52, 1938, 20—22.
8. Яцкин Я. С. — АЦ, Изд-во АН СССР, № 232, 1962, 14—15.
9. Клепиков Н. П., Соколов С. Н. — В кн.: Анализ и планирование экспериментов методом максимума правдоподобия. «Наука», 1964.
10. Айазян С. А. Статистическое исследование зависимостей. «Металлургия», 1968.
11. Большев Н. Л., Смирнов Н. В. — Таблицы математической статистики. «Наука», М., 1965.
12. Яцкин Я. С. — В кн.: Астрометрия и астрофизика, 7. «Наукова думка», К., 1969.
13. Орлов А. Я. — Изд-во АН УССР, 1961, 234—260.
14. Костина Л. Д. — В кн.: Анализ результатов широтных наблюдений «ФАН», Ташкент, 1966, 96.
15. Орлов А. Я. — Изд-во АН УССР, 1961, 149.
16. Дунин-Барковский И. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике, 1955.
17. Munk W. H., Snodgrass F. E., Tucker M. J. — Bull. seripps. inst. oceanogr. univ. California, 1959, 7, N 4, pp. 9.

ON ESTIMATION OF THE ERROR SPECTRUM OF LATITUDE OB Elevation IN A HIGH-FREQUENCY REGION

V. N. KOROVICH, Ya. S. YATSKIV

Summary

The paper deals with the procedure of estimation and study of the error spectrum of latitude observation in a high-frequency region. This procedure was applied to the latitude observations at Pulkovo according to the extended program.

It is shown that both random error dispersion of the observations and coefficients of the Tchebyshev polynomials representing the diurnal latitude variation differ substantially for the different intervals of the observations. The power spectrum of normalized random deviations in a frequency region from 4 to 52.5 cycle per day is that of so-called «white noise».

О НАЗНАЧЕНИИ ВЕСОВ АСТРОНОМИЧЕСКИМ НАБЛЮДЕНИЯМ

И. В. Джунь

(Ровенский институт инженеров водного хозяйства, г. Ровно)

Распределение случайных погрешностей астрономических измерений существенно отличается от нормального [1—4]. Причиной этого могут быть ошибки, оказывающие превалирующее воздействие на измерения, а также изменения характеристик распределения со временем. Таким образом, приступая к анализу результатов астрономических определений, следует проверить гипотезу о согласии эмпирического и нормального распределений. Если окажется, что различие между ними существенно, нужно подобрать для описания распределения измеряемой величины ту или иную сглаживающую кривую. Такой подход позволит найти вместо обычной среднеарифметической наиболее вероятную оценку измеряемой величины. Пусть x_1, x_2, \dots, x_n — ряд наблюдений, плотность вероятности случайной погрешности $(x_j - \lambda)$ которого равна $f(x_j - \lambda)$.

Запишем функции правдоподобия

$$L = f(x_1 - \lambda) \cdot f(x_2 - \lambda) \cdots f(x_n - \lambda). \quad (1)$$

Тогда оценку λ по методу максимального правдоподобия находим из условия

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$\sum_{j=1}^n \frac{f'(x_j - \lambda)}{f(x_j - \lambda)} = 0, \quad (3)$$

где $f'(x_j - \lambda)$ — производная функции плотности вероятности по λ , взятая с обратным знаком. Уравнение (3) можно записать в виде [2, 5]:

$$\sum_{j=1}^n (x_j - \lambda) W(x_j - \lambda) = 0, \quad (4)$$

где

$$W(x_j - \lambda) = \frac{1}{x_j - \lambda} \frac{f'(x_j - \lambda)}{f(x_j - \lambda)}. \quad (5)$$